

Dr Miodrag Popović

Osnovi elektronike

za studente Odseka za softversko inženjerstvo

Elektrotehnički fakultet
Beograd, 2006.

Sadržaj

1. UVOD.....	1
1.1 Šta je to elektrotehnika?.....	1
1.2 Oblasti elektrotehnike:.....	1
1.3 Šta je to elektronika?.....	2
2. OSNOVNI POJMOVI O ELEKTRICITETU	4
2.1 Električno opterećenje	4
2.2 Sila između dva tačkasta električna opterećenja.....	4
2.3 Provodnici, izolatori i poluprovodnici.....	4
2.4 Električna struja	5
2.5 Napon	6
2.6 Referentni smerovi i polariteti	6
2.7 Energija i snaga.....	7
2.8 Električno polje.....	7
2.9 Modelovanje električnih sistema.....	8
2.10 Idealni električni elementi	8
2.11 Idealni pasivni električni elementi.....	8
2.12 Idealni nezavisni električni izvori.....	9
2.13 Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori	10
3. KOLA SA STALNIM JEDNOSMERNIM STRUJAMA	11
3.1 Omov zakon	11
3.2 Električno kolo.....	12
3.3 Prvi (strujni) Kirhofov zakon.....	13
3.4 Drugi (naponski) Kirhofov zakon.....	13
3.5 Paralelna i serijska veza otpornika	13
3.5.1 Serijska (redna) veza otpornika	13
3.5.2 Paralelna veza otpornika.....	14
3.6 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao	16
3.7 Sistem jednačina napona čvorova.....	17
3.8 Linearna kola: principi superpozicije i homogenosti.....	17
3.9 Transformacija izvora	18
3.10 Tevenenova i Nortonova teorema.....	19
4. KOLA SA PROMENLJIVIM STRUJAMA	21
4.1 Kondenzator	21
4.2 Kalem	22
4.3 Kola prvog reda sa kondenzatorima i kalemovima.....	23
4.4 Kola drugog reda sa kondenzatorima i kalemovima.....	26
5. KOLA SA NAIZMENIČNIM STRUJAMA	30
5.1 Osnovni pojmovi.....	30
5.2 Predstavljanje sinusoidalnih veličina kompleksnim brojevima.....	31
5.3 Opis elemenata kola pomoću fazora.....	33
5.4 Uopšteni Omov zakon: impedansa i admitansa	34
5.5 Snaga naizmjenične struje.....	37
5.6 Kirhofovi zakoni u kolima sa naizmjeničnim strujama	38
5.7 Osnovne transformacije u kolima sa naizmjeničnim strujama	39
5.7.1 Serijska (redna) veza impedansi.....	39
5.7.2 Paralelna veza impedansi.....	40
5.7.3 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao	41
5.7.4 Transformacije izvora u kolima sa naizmjeničnim strujama	42
5.8 Sistem jednačina napona čvorova za kola sa naizmjeničnim strujama	43
5.9 Tevenenova i Nortonova teorema za kola sa naizmjeničnim strujama	43
5.10 Kola sa jednim i dva pristupa	44
5.11 Analiza kola sa složeno-periodičnim strujama.....	46

6. OSNOVI FIZIKE POLUPROVODNIKA.....	49
6.1 Osnovni pojmovi o provodnosti materijala.....	49
6.2 Elektronska struktura materijala.....	50
6.3 Silicijum kao poluprovodnik.....	51
6.4 Dopiranje silicijuma primesama.....	52
7. PN SPOJ.....	55
7.1 Nepolarisani pn spoj.....	55
7.2 Direktno polarisani pn spoj.....	56
7.3 Inverzno polarisani pn spoj.....	57
7.4 Proboj <i>pn</i> spoja i Zener dioda.....	58
7.5 Modeli diode.....	58
7.5.1 Karakteristika diode.....	58
7.5.2 Idealna dioda.....	59
7.5.3 Izlomljeno linearni model diode.....	59
7.5.4 Model diode sa konstantnim padom napona.....	60
7.5.5 Model diode za male signale.....	60
7.6 Radna tačka diode.....	61
7.7 Primene i vrste dioda.....	62
8. BIPOLARNI TRANZISTOR.....	63
8.1 Struktura i simboli bipolarnog tranzistora.....	63
8.2 Rad bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu.....	64
8.2.1 Model npn tranzistora za velike signale.....	65
8.2.2 Model tranzistora za male signale.....	66
8.3 Ulazne i izlazne karakteristike tranzistora.....	67
8.4 Polarizacija tranzistora.....	67
8.5 Osnovna pojačavačka kola sa jednim tranzistorom.....	69
8.5.1 Pojačavač sa zajedničkim emitorom.....	69
8.5.2 Pojačavač sa zajedničkim kolektorom.....	70
8.5.3 Pojačavač sa zajedničkom bazom.....	72
9. MOS TRANZISTOR (MOSFET).....	74
9.1 Struktura i simboli MOS tranzistora.....	74
9.2 Princip rada NMOS tranzistora.....	75
9.2.1 Ponašanje NMOS tranzistora pri malim naponima V_{DS}	76
9.2.2 Ponašanje NMOS tranzistora pri većim naponima V_{DS}	76
9.3 PMOS tranzistor i komplementarni MOS (CMOS).....	77
9.4 Model NMOS tranzistora za velike signale.....	77
9.4.1 NMOS tranzistor u zakočenju.....	78
9.4.2 NMOS tranzistor u triodnoj oblasti.....	78
9.4.3 NMOS tranzistor u zasićenju.....	78
9.5 Model NMOS tranzistora za male signale.....	79
9.6 Osnovna pojačavačka kola sa NMOS tranzistorom.....	81
9.6.1 Pojačavač sa zajedničkim sorsom.....	81
9.6.2 Pojačavač sa zajedničkim drejnom.....	81
9.6.3 Pojačavač sa zajedničkim gejtom.....	82
10. SLOŽENA POJAČAVAČKA KOLA.....	84
10.1 Strujni izvori.....	84
10.2 Pojačavač sa dinamičkim opterećenjem.....	86
10.3 Diferencijalni pojačavač.....	87
10.4 Operacioni pojačavač.....	90
10.5 Primene operacionog pojačavača.....	91
10.5.1 Invertorski pojačavač.....	91
10.5.2 Neinvertorski pojačavač.....	91
10.5.3 Jedinični pojačavač.....	92
10.5.4 Kolo za sabiranje.....	92
10.5.5 Kolo za integraljenje.....	93
10.5.6 Kolo za diferenciranje.....	94
11. DIGITALNA ELEKTRONSKA KOLA.....	96
11.1 Analogni i digitalni signali i kola.....	96

11.2	Logičke funkcije idealnih logičkih kola i Bulova algebra	97
11.2.1	I operacija (logičko množenje)	98
11.2.2	ILI operacija (logičko sabiranje)	98
11.2.3	NE operacija (komplementiranje)	98
11.2.4	Pravila Bulove algebre	99
11.2.4.1	Identiteti Bulove algebre	99
11.2.4.2	Zakoni Bulove algebre	99
11.2.4.3	Teoreme Bulove algebre	100
11.2.5	NI operacija	101
11.2.6	NILI operacija	101
11.2.7	Isključivo-ILI operacija	101
11.2.8	Operacija koincidencije (isključivo-NILI)	102
11.2.9	Predstavljanje logičkih funkcija	102
11.3	Karakteristike realnih logičkih kola	103
11.3.1	Karakteristika prenosa	103
11.3.2	Margine šuma	104
11.3.3	Faktor grananja na izlazu i ulazu	105
11.3.4	Dinamičke karakteristike	106
11.3.5	Disipacija (potrošnja) logičkog kola i proizvod snage i kašnjenja	106
11.4	Realizacija invertora sa MOS tranzistorima	107
11.4.1	Karakteristika prenosa	109
11.4.2	Dinamičke karakteristike	112
11.4.3	Disipacija CMOS kola	112
11.5	Logička kola sa MOS tranzistorima	113
11.6	Bistabilna kola	114
11.6.1	SR leč	115
11.6.2	D leč	117
11.6.3	D flipflop	118
11.7	Multivibratorska kola	119
11.7.1	Monostabilni multivibrator	119
11.7.2	Astabilni multivibrator	121
11.8	Digitalno-analoga i analogno-digitalna konverzija	123
11.8.1	Digitalno-analoga konverzija	123
11.8.2	Analogno-digitalna konverzija	124
11.9	Osnovna memorijska kola	125
11.9.1	Statičke memorije	126
11.9.2	Dinamičke memorije	127

1. Uvod

Savremeni tehnološki problemi su veoma složeni i njihovo rešavanje zahteva učešće inženjera i istraživača iz raznih oblasti nauke i tehnike, koji se organizuju u razvojne ili istraživačke timove. U takvim uslovima inženjer, koji je specijalizovan za određenu oblast, često treba da radi sa stručnjacima drugih specijalnosti.

Da bi se olakšala saradnja inženjera različitih specijalnosti potrebno je da svaki od njih bar delimično poznaje srodne oblasti tehnike, kako bi razumeo probleme i ograničenja u rešavanju problema u celini. Zbog toga se u svetu, prilikom obrazovanja inženjera uvek proučavaju i oblasti koje nisu direktno u vezi sa odabranom specijalizacijom.

U savremenom svetu svedoci smo da električni ili elektronski uređaji prodiru u sve oblasti života. Automobili imaju elektronske uređaje za nadzor i upravljanje, uređaji bele tehnike u domaćinstvu imaju sve više elektronskih funkcija, mobilni telefoni su napravili revoluciju u telekomunikacijama, uvođenje računara i Interneta u kuće je promenilo način života, itd.

Ovaj predmet upravo ima za cilj da studente, kojima će primarna specijalizacija biti pisanje softvera za razne vrste računara, upozna sa osnovima elektrotehnike i elektronike kako bi razumeli kako takvi elektronski sistemi funkcionišu i kako bi mogli da efikasno komuniciraju sa ekspertima iz drugih struka sa kojima će saradivati.

1.1 Šta je to elektrotehnika?

Oblast elektrotehnike obuhvata primene elektriciteta za zadovoljavanje potreba društva. Postoje dve glavne primene elektriciteta: za *prenos električne energije* sa jednog mesta na drugo ili za *prenos informacija*. Elektrotehnika je oblast koja se izdvojila iz fizike i poslednjih 150 godina se stalno i dinamično razvijala. O razvoju elektrotehnike svedoči stalna pojava novih podoblasti kao i broj naučnih i stručnih publikacija iz elektrotehnike koji u velikoj meri prevazilazi obim sličnih publikacija iz drugih oblasti tehnike.

1.2 Oblasti elektrotehnike:

Osnovno jezgro elektrotehnike se tradicionalno deli na sedam specijalizovanih podoblasti:

1. Elektroenergetika
2. Elektromagnetika
3. Komunikacije
4. Računarsko inženjerstvo
5. Sistemi
6. Upravljanje
7. Elektronika

Elektroenergetika se bavi proizvodnjom i prenosom električne energije sa jedne lokacije na drugu i najstarija je elektrotehnička specijalnost. Ceo razvoj savremenog društva zavisi u kritičnoj meri od potreba za električnom energijom za napajanje električnih uređaja u domaćinstvu i industriji. Zato su za proizvodnju električne energije razvijeni razni sistemi za

pretvaranje drugih oblika energije (toplotne, hidromehaničke, nuklearne, solarne, energije vetra, elektrohemijske, ...) u električnu energiju.

Elektromagnetika premošćava jaz između primena elektrotehnike za prenos energije i ostalih disciplina koje su uglavnom vezane za prenos informacija. Ona se bavi proučavanjem i primenom električnog polja, magnetskog polja i struje. Električna struja može biti uvek istog smera (*jednosmerna struja*) ili promenljivog smera (*naizmjenična struja*). Kod naizmjeničnih struja definiše se pojam *učestanosti* ili *frekvencije*, koja predstavlja broj promena smera struje u sekundi. Jedinica za frekvenciju je Herc (Hz). Opseg učestanosti koji se sreće u praksi je veoma širok. U elektroenergetici se koriste naizmjenične struje učestanosti 50 Hz ili 60 Hz, dok se u drugim oblastima koriste znatno više učestanosti, čak do 10^{11} Hz. Na višim učestanostima počinje zračenje iz kablova i kroz atmosferu se prostiru elektromagnetski talasi. Ovakvi talasi su omogućili pojavu radija, televizije, bežičnih komunikacija, radara, itd.

Komunikacije ili *telekomunikacije* su podoblast elektrotehnike koja se bavi prenosom informacija sa jednog mesta na drugo. Informacije se prenose pomoću električnih provodnika, elektromagnetskih talasa, klasičnim kablovima, optičkim kablovima, itd. Jedan od važnih problema koji se rešava u komunikacijama je način na koji se informacije utiskuju u električni signal. Taj proces se naziva modulacija ili kodovanje i obavlja se na predajnoj strani, dok se na prijemnoj strani obavlja inverzni proces koji se naziva demodulacija ili dekodovanje. U procesu prenosa nastaje i degradacija signala zbog dejstva smetnji ili šuma pa se u komunikacijama velika pažnja posvećuje metodima za izvlačenje korisnih informacija iz šuma i metodima za zaštitu informacija. Većina ovih metoda zahteva upotrebu računara.

Računarsko inženjerstvo je jedna od podoblasti elektrotehnike koje se bavi razvojem i projektovanjem računarskog hardvera i softvera koji kontroliše njegov rad. Savremeni računarski sistemi mogu biti veoma različiti, počev od jednostavnih mikrokontrolera koji obavljaju jednostavne nadzorne funkcije, preko personalnih računara i radnih stanica koji se koriste za obavljanje raznovrsnih aplikacija, slušanja muzike, gledanje filmova i igru, pa do moćnih superračunara za izvršavanje kompleksnih proračuna u fizici, meteorologiji i istraživanju svemira.

Oblast *sistemske inženjerstva* se bavi modelovanjem kompleksnih sistema matematičkim modelima u cilju njihovog jednostavnijeg opisa i predviđanja njihovog ponašanja. Primeri takvih sistema su, na primer, modelovanje saobraćaja ili modelovanje leta aviona. Takav matematički opis sistema omogućava jednostavniju analizu ponašanja sistema u raznim uslovima bez izvođenja eksperimenta.

Upravljanje sistemima je takođe jedna od važnih oblasti elektrotehnike koja se bavi upravljanjem raznim elektromehaničkim i drugim složenim sistemima uz pomoć odgovarajućih modela i algoritama za reagovanje u različitim situacijama.

1.3 Šta je to elektronika?

Oblast *elektronike* se bavi proučavanjem i konstrukcijem elektronskih elemenata kojima se kontroliše tok struje i povezivanjem takvih elemenata u složena kola koja obavljaju željenu funkciju. Osnovni elementi savremene elektronike su diode i tranzistori koji se povezuju u diskretna ili integrisana kola. Pored toga, elektronika se bavi i projektovanjem elektronskih kola za određene namene, razvojem algoritama za projektovanje, razvojem i primenom računarske podrške procesu projektovanja, implementacijom elektronskih kola koja realizuju razne metode potrebne u ostalim oblastima elektrotehnike, itd.

Mada je oblast elektronike stara već oko 100 godina, ona je u toku svoje istorije imala izuzetno dinamičan razvoj, a takva je i danas. Usled razvoja tehnologije stalno se pronalaze novi materijali i konstruišu nove komponente, što u velikoj meri utiče na promenu postupaka

projektovanja. Već dvadesetak godina je prisutan trend minijaturizacije komponenata i trend integracije velikog broja komponenata u jedno integrisano kolo. To je omogućilo drastično smanjenje dimenzija elektronskih uređaja, smanjenje njihove potrošnje, povećanje brzine rada i povećanje pouzdanosti uređaja. Na primer, jedan od prvih elektronskih računara ENIAC iz 1947. godine koji je imao oko 17000 elektronskih cevi i memoriju od svega nekoliko kB, bio je smešten u prostoriju veličine sportske sale, a njegova potrošnja se merila desetinama kW. Današnji računari imaju sve važne performanse najmanje 1000 do 10000 puta bolje. Drugi karakterističan primer je mobilni telefon koji je pre samo dvadesetak godina, za neuporedivo lošije performanse, imao veličinu koja je jedva mogla da stane u automobil.

2. Osnovni pojmovi o elektricitetu

Elektrotehnika se prvenstveno bavi *električnim opterećenjem (naelektrisanjem)*, njegovim kretanjem i efektima tog kretanja. Za nepokretno naelektrisanje često se koristi termin *statičko naelektrisanje*, a za pokretno naelektrisanje termin *električna struja*.

2.1 Električno opterećenje

Električno opterećenje je fundamentalno svojstvo materije koje se ne može se stvoriti niti uništiti. To znači da ako se naelektrisanje odstrani sa nekog mesta, ono se mora pojaviti na nekom drugom mestu. Postoje dva tipa naelektrisanja: *pozitivno* i *negativno* naelektrisanje. Dva naelektrisanja se međusobno privlače ako su suprotnog polariteta ili međusobno odbijaju ako su istog polariteta.

Uprošćena struktura atoma se sastoji od pozitivno naelektrisanog jezgra i elektrona koji kruže oko jezgra po različitim orbitama. Električno opterećenje elektrona je najmanje naelektrisanje koje postoji. Električno opterećenje jednog elektrona naziva se *elementarno naelektrisanje* ili *kvant naelektrisanja*. Pozitivno naelektrisanje jezgra je kompenzovano istom količinom negativnog naelektrisanja elektrona, pa je atom električki neutralan. Međutim, pošto se elektroni iz najudaljenijih orbita mogu na razne načine odvojiti od atoma, atom može postati naelektrisan (tada se naziva *jon*), a elektroni se mogu kretati i formirati električnu struju.

Uobičajeni simbol za opterećenje je q (Q) a jedinica Kulon (C). Električno opterećenje jednog elektrona je -1.602×10^{-19} C.

2.2 Sila između dva tačkasta električna opterećenja

Sila između dva naelektrisanja, koja su dovoljno mala u odnosu na njihovo rastojanje (pa se nazivaju *tačkasta naelektrisanja*), opisana je sledećom jednačinom:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (2.1)$$

gde je konstanta $k = 8.99 \times 10^9$ Nm²/C², q_1 i q_2 predstavljaju veličine naelektrisanja (u C), a d njihovo međusobno rastojanje (u m). Ova relacija se naziva *Kulonov zakon*. Ako su naelektrisanja istog znaka sila je pozitivna i naelektrisanja se odbijaju, a ako su naelektrisanja suprotnog znaka sila je negativna i naelektrisanja se privlače.

2.3 Provodnici, izolatori i poluprovodnici

Materijal kod kojeg su elektroni lako pokretljivi naziva se *provodnik*. Tipični provodnici su metali: srebro, zlato, bakar, aluminijum, itd. Kod metala elektroni iz spoljašnjih orbita atoma mogu lako napustiti atome. Takvi elektroni se nazivaju *slobodni elektroni* i oni omogućavaju lako uspostavljanje električne struje.

Materijal kod kojeg su elektroni slabo pokretljivi naziva se *izolator* ili *dielektrik*. Tipični izolatori su nemetali: staklo, plastične mase, keramika, guma, itd. Naelektrisanje koje se dovede

na izolator ostaje nepokretno i naziva se statički elektricitet. Izolacioni materijali se često koriste za izolovanje provodnika da bi se sprečio neželjeni dodir dva provodnika i uspostavljanje struje između njih.

Poluprovodnici su po svojim osobinama negde između provodnika i izolatora i umereno se suprostavljaju kretanju nosilaca elektriciteta. Najvažniji poluprovodnici su silicijum, germanijum, galijum arsenid, itd. Poluprovodnički materijali su osnov savremene elektronike.

Otpornost je mera suprostavljanja kretanju nosilaca elektriciteta i biće kasnije kvantitativno definisana. Provodnici imaju malu otpornost, dok izolatori imaju veliku otpornost. Na primer, otpornost bakra je oko 10^{25} puta manja od otpornosti kvarca istih dimenzija.

2.4 Električna struja

Električna struja je jedan od osnovnih pojmova u elektrotehnici i predstavlja meru količine elektriciteta koja se pomerila u jedinici vremena. Pomeraj naelektrisanja može se vršiti na različite načine. Kod metalnih provodnika, mehanizam pomeranja je kretanje slobodnih elektrona. U rastvorima mehanizam pomeranja je kretanje pozitivno ili negativno naelektrisanih jona, kao što je to slučaj u elektrohemijским baterijama ili u postupku galvanizacije. U poluprovodnicima naelektrisanje se kreće kretanjem slobodnih elektrona ili šupljina koje su nosioci pozitivnog naelektrisanja.

Uobičajena oznaka za struju je I ili i . Jedinica za struju je Amper (A) i predstavlja pomeraj od 1 C/s. Po konvenciji se uzima da smer struje odgovara smeru kretanja pozitivnog naelektrisanja.

Prosečna (srednja) struja I se definiše kao količnik ukupnog pomeranog naelektrisanja Δq i vremenskog intervala u kome se vrši taj pomeraj Δt :

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2.2)$$

S druge strane, trenutna struja i se definiše kao brzina promene naelektrisanja, odnosno prvi izvod količine elektriciteta po vremenu:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.3)$$

U slučajevima kada se struja sastoji od kretanja dva tipa nosilaca, trenutna struja se može izraziti i na sledeći način:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{dq^+ + dq^-}{dt} \quad (2.4)$$

gde je dq^+ pomerenost inkrementalno pozitivno naelektrisanje dok je dq^- pomerenost inkrementalno negativno naelektrisanje.

U elektrotehnici se sreću vrlo različite vrednosti struje. Struja kod munja i gromova je reda nekoliko desetina hiljada ampera. U industrijskim pogonima i električnim vozilima struje su reda stotinu ampera. Uređaji u domaćinstvu obično rade sa strujama u opsegu od 0.5 A do 16 A. U elektronskim kolima struje su reda mA, μ A ili nA. U raznim mernim uređajima u fizici struje mogu biti vrlo male, reda pA (10^{-12} A), kolike su i struje između nervnih ćelija kod živih bića.

2.5 Napon

Napon predstavlja potencijalnu energiju. Razlika potencijala predstavlja sposobnost prenosa naelektrisanja u toku struje.

Jedinica za napon je Volt (V) i predstavlja energiju od 1 J, koja je potrebna za pomeraj pozitivnog naelektrisanja od 1 C. Uobičajena oznaka za napon u elektronici je V ili v .

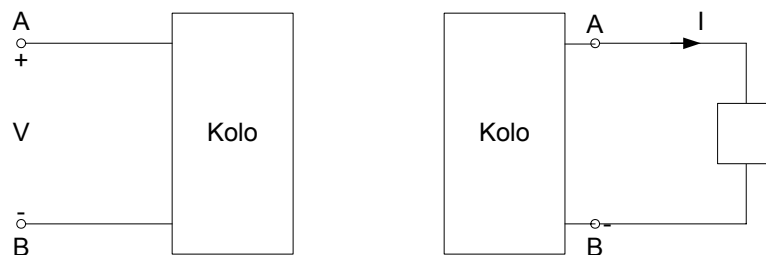
Posmatrajući inkrementalne promene energije i naelektrisanja, trenutni napon se može definisati kao:

$$v = \frac{dw}{dq} \quad (2.5)$$

2.6 Referentni smerovi i polariteti

Prilikom analize mehaničkih sistema uvek se koristi neki koordinatni sistem, koji definiše šta se podrazumeva pod pozitivnim smerom. Slična situacija je i u analizi električnih pojava, gde je vrlo važno da naponi i struje u kolu budu tako definisani da se lako može odrediti koja je od dve tačke na višem potencijalu, ili koji je stvarni smer neke struje.

Na sl. 2.1a sa V je označen napon između tačaka A i B. Znaci + i – označavaju referentni smer napona V . Ako je $V > 0$, onda je tačka sa oznakom + (A) na višem potencijalu od tačke sa oznakom – (B), ako je $V < 0$, onda je tačka sa oznakom + (A) na nižem potencijalu od tačke sa oznakom – (B). Znak – se ne mora pisati, tada se on implicitno podrazumeva. Referentni smer napona se može proizvoljno usvojiti. Neka je, na primer, na slici 2.1a vrednost napona $V = 3$ V, što znači da je potencijal tačke A veći za 3 V od potencijala tačke B. Ako bi se referentni smer usvojio tako da + bude kod tačke B, onda bi vrednost napona V bila $V = -3$ V, što ima isto značenje kao u prethodnom slučaju.



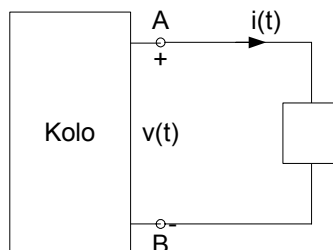
Slika 2.1: Označavanje polariteta napona i referentnog smera za struju.

Na slici 2.1b je strelicom označen referentni smer za struju I , tako da ona protiče od tačke A, kroz element kola, do tačke B. Ako je $I > 0$, onda je stvarni smer struje isti sa referentnim smerom, a ako je $I < 0$, onda je stvarni smer struje suprotan referentnom smeru. Neka je $I = 4$ A. Onda je stvarni smer struje identičan sa nacrtanim referentnim smerom, a amplituda struje je 4 A. Ako bi pretpostavljeni referentni smer bio suprotan nacrtanom na sl. 2.1b, tada bi vrednost struje bila $I = -4$ A, pa bi stvarni smer struje bio suprotan referentnom, odnosno isti kao u prvom slučaju.

Kao što se vidi, neophodno je potrebno specificirati vrednost i referentni smer bilo kog napona ili struje u kolu. Vrednosti veličina date bez referentnog smera su nekompletne, jer definišu samo vrednosti odgovarajućih veličina, a ne i njihove smerove.

2.7 Energija i snaga

Energija je važan pojam u analizi električnih kola. U elektrotehnici i elektronici se srećemo sa elementima koji primaju energiju od kola ili predaju energiju kolu. Smer prenosa energije zavisi od znaka napona i struje.



Slika 2.2: Konvencija za označavanje polariteta pri izračunavanju snage.

Na primer, na sl. 2.2 energija iz kola se *predaje* elementu vezanom između tačaka A i B ako je $v(t) > 0$ i $i(t) > 0$. Za takav element se kaže da prima energiju i on se naziva *pasivni element*. Kod pasivnih elemenata *pozitivna struja ulazi u pozitivni naponski terminal*.

Ako je $v(t) > 0$ i $i(t) < 0$, element predaje energiju kolu. Takav element se naziva *aktivni element* ili *izvor*. Kod aktivnih elemenata *pozitivna struja ulazi u negativni naponski terminal*.

Snaga se definiše kao brzina promene energije:

$$p = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \frac{dq}{dt} = vi \quad (2.6)$$

Gornja jednačina pokazuje da se snaga na elementu kola može predstaviti proizvodom napona na elementu i struje kroz element. Pošto napon i struja mogu biti vremenski promenljivi, snaga se takođe može menjati sa vremenom i onda se označava sa $p(t)$.

Promena energije od trenutka t_1 do trenutka t_2 može se odrediti integracijom jednačine za snagu kao:

$$w = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} vi dt \quad (2.7)$$

Izračunavanje snage zahteva konsistentno korišćenje konvencije o smerovima napona na elementi i struje kroz element. Referentni polaritet napona na elementu $v(t)$ i referentni smer struje kroz element $i(t)$, moraju biti tako definisani da *pozitivni terminal napona bude kod one tačke elementa u koju ulazi referentni smer struje*, kao što je prikazano na sl. 2.2. Onda će proizvod napona i struje odrediti znak snage. Ako je $p(t) > 0$, element je pasivan, ako je $p(t) < 0$, element je aktivan.

2.8 Električno polje

U prethodnom izlaganju smo objasnili da svako naelektrisano telo deluje na druga naelektrisana tela nekom mehaničkom silom. Dakle, oko svakog naelektrisanog tela postoji polje koje se naziva *električno polje*. Jačina električnog polja se definiše kao vektor čiji je intenzitet:

$$E = \frac{F}{q} \quad (2.8)$$

a pravac i smer se poklapaju sa smerom sile koja deluje na pozitivno električno optrećenje.
Električno polje oko tačkastog nalektrisanja je:

$$E = k \frac{q}{d^2} \quad (2.9)$$

Posebno interesantan je slučaj električnog polja između dve ravne paralelne ploče razdvojene dielektrikom debljine d . Takva struktura se naziva *pločasti kondenzator*. Neka je površina ploča S , njihova nalektrisanja $+q$ i $-q$, a napon (potencijalna razlika) između ploča V . Onda je jačina električnog polja:

$$E = \frac{q}{\epsilon S} = \frac{V}{d} \quad (2.10)$$

gde je ϵ tzv. dielektrična konstanta materijala. Dakle, električno polje u pločastom kondenzatoru je *homogeno*.

2.9 Modelovanje električnih sistema

Modelovanje je proces uprošćenog predstavljanja realnog fizičkog sistema na način koji omogućava primenu matematičkih tehnika za analizu takvog sistema. Uprošćavanje predstave sistema se izvodi usvajanjem izvesnih pretpostavki kojima se zanemaruju nebitna svojstva.

U analizi električnih kola jedna od najvažnijih uprošćavajućih pretpostavki je da su osnovne karakteristike kola koncentrisane u pojedinačne blokove (električne elemente), koji su povezani idealnim provodnicima. Takva pretpostavka je opravdana sve dok učestanost signala nije suviše visoka, tj. manja je od mikrotalasnih učestanosti.

2.10 Idealni električni elementi

Idealni električni elementi su kompletno opisani matematičkom relacijom između napona na elementu i struje kroz element.

Idealni električni elementi se mogu podeliti na aktivne ili pasivne zavisno od toga da li predaju energiju ostatku kola ili primaju energiju iz kola.

2.11 Idealni pasivni električni elementi

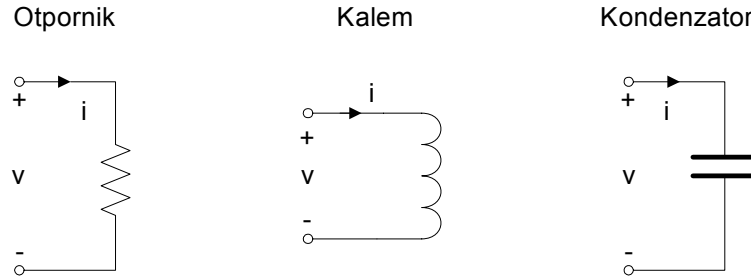
Idealni pasivni električni elementi su *otpornik, kalem i kondenzator*. Oni su opisani matematičkim relacijama:

$$v = Ri \quad v = L \frac{di}{dt} \quad v = \frac{1}{C} \int i dt \quad (2.11)$$

ili

$$i = \frac{1}{R}v \quad i = \frac{1}{L} \int v dt \quad i = C \frac{dv}{dt} \quad (2.12)$$

i predstavljeni simbolima kao na slici 2.3:



Slika 2.3: Idealni pasivni električni elementi.

Otpornik predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u toplotu ili svetlosnu energiju. Konstanta R u definicionim relacijama predstavlja *otpornost* otpornika (jedinica Om - Ω).

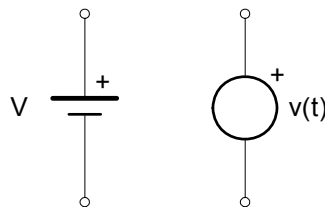
Kalem predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u magnetsko polje. Konstanta L u definicionim relacijama predstavlja *induktivnost* kalema (jedinica Henri - H).

Kondenzator predstavlja komponentu kod koje se energija koja se predaje elementu pretvara u električno polje. Konstanta C u definicionim relacijama predstavlja *kapacitivnost* kondenzatora (jedinica Farad - F).

Ova tri pasivna elementa, zajedno sa izvorima koji će biti definisani u narednim odeljcima, omogućavaju da se predstavi i analizira vrlo širok krug električnih i elektronskih kola.

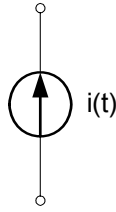
2.12 Idealni nezavisni električni izvori

Idealni *nezavisni naponski izvor* je aktivni element koji održava napon između pristupa nezavisno od struje kroz njega. Vrednost napona nezavisnog naponskog izvora može biti konstantna V (kao kod elektrohemijskih baterija), ili neka funkcija vremena $v(t)$. Simboli koji se koriste za predstavljanje idealnih naponskih izvora prikazani su na sl. 2.4. Znak + pored simbola označava referentni polaritet napona izvora.



Slika 2.4: Idealni nezavisni naponski izvori.

Idealni *nezavisni strujni izvor* je aktivni element koji održava struju između pristupa nezavisno od napona između pristupa. Vrednost struje nezavisnog strujnog izvora može biti konstantna I , ili neka funkcija vremena $i(t)$. Simbol koji se koristi za predstavljanje idealnog strujnog izvora prikazan je na sl. 2.5. Strelica u simbolu označava referentni smer struje izvora.



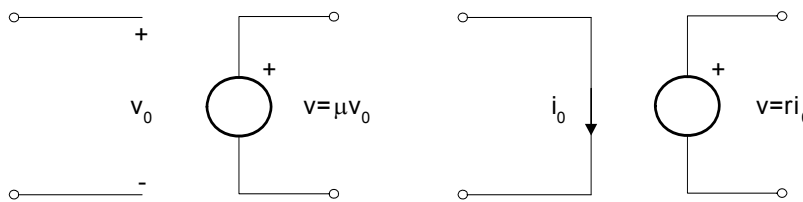
Slika 2.5: Idealni nezavisni strujni izvor.

Na primerima modela nezavisnih izvora mogu se lako uočiti uproćavanja prilikom modelovanja komponenti. Na primer, idealni naponski izvor održava napon $v(t)$ na svojim krajevima nezavisno od struje. Teorijski, struja bi mogla da bude i beskonačno velika, što bi izazvalo da takav izvor može generisati beskonačnu snagu. To je naravno fizički nemoguće. Dakle, idealni modeli komponenata predstavljaju važeće aproksimacije realnih komponenata samo pod izvesnim uslovima.

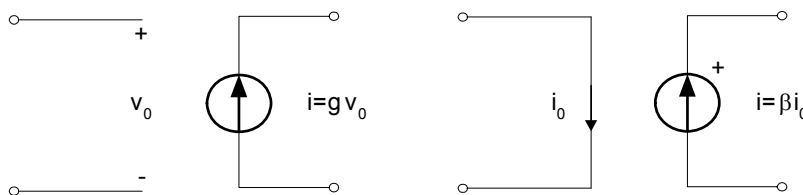
2.13 Idealni zavisni (kontrolisani) električni izvori

Za razliku od nezavisnih izvora koji generišu neki napon (ili struju) nezavisno od toga šta se dešava u ostatku kola, idealni *zavisni izvori* generišu napon (ili struju) koja zavisi od nekog drugog napona ili struje u kolu. Ovakvi izvori su važni jer omogućavaju modelovanje mnogih elektronskih elemenata, kao što su, na primer, tranzistori.

Postoje 4 tipa idealnih zavisnih izvora, koji su prikazani na slikama 2.6 i 2.7. Kao što se vidi, zavisni izvori imaju četiri priključka. Ulazni krajevi (sa leve strane) predstavljaju veličinu koja *kontrolise* izvor, a izlazni krajevi (sa desne strane) predstavljaju izlaznu struju ili napon kontrolisanog izvora. Primetimo da su konstante μ i β bezdimenzione konstante, jer se u prvom slučaju napon transformiše u napon, a u drugom slučaju se struja transformiše u struju. Konstanta μ se često naziva *naponsko pojačanje*, a konstanta β *strujno pojačanje*. S druge strane, konstante r i g su dimenzione konstante. Konstanta r ima dimenziju otpornosti pa se naziva *transimpedansa*, dok konstanta g ima dimenziju recipročnu otpornosti i naziva se *transkonduktansa*.



Slika 2.6: Naponski kontrolisani naponski izvor (NKNI) i strujno kontrolisani naponski izvor (SKNI).



Slika 2.7: Naponski kontrolisani strujni izvor (NKSI) i strujno kontrolisani strujni izvor (SKSI).

Equation Section (Next)

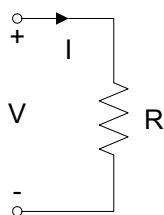
3. Kola sa stalnim jednosmernim strujama

Kola sa stalnim jednosmernim strujama sastoje se samo od otpornika i izvora konstantnog napona ili struje. Jednačine koje opisuju takvo kolo su linearne, tako da se takav sistem jednačina može lako rešiti. Zbog jednostavnosti opisa kola, kod kola sa stalnim jednosmernim strujama lako je objasniti osnovne zakone, kao što su Omov zakon, prvi i drugi Kirhofov zakon.

3.1 Omov zakon

Omov zakon definiše zavisnost napona od struje kod otpornika i glasi: *Napon na otporniku je direktno proporcionalan struji kroz otpornik.*

$$V = RI \quad (3.1)$$



Slika 3.1: Omov zakon.

Konstanta proporcionalnosti R predstavlja *otpornost* otpornika. Jedinica za otpornost je Om (Ω). U praksi se otpornici prave nanošenjem metalnog ili ugljenog filma na keramičku podlogu, ili od žice velike specifične otpornosti. U integrisanim kolima se otpornici prave posebnim tehnikama koje su prilagođene proizvodnji ostalih poluprovodničkih komponenata. Tipične vrednosti otpornosti koje se sreću u elektrotehnici i elektronici se kreću od delova Ω do nekoliko $M\Omega$.

Provodnost otpornika G je recipročna vrednost otpornosti:

$$G = \frac{1}{R} \quad (3.2)$$

Jedinica za provodnost je Simens (S). Omov zakon izražen preko provodnosti glasi:

$$I = GV \quad (3.3)$$

Otpornik je pasivni element koji apsorbira snagu električne energije i pretvara je u toplotu. Snaga razvijena na otporniku je proizvod struje i napona:

$$P = VI \quad (3.4)$$

Primenom Omovog zakona, snaga na otporniku se može izraziti i primenom ekvivalentnih izraza:

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R} = GV^2 = \frac{I^2}{G} \quad (3.5)$$

Specijalni slučajevi otpornosti:

$$R = 0 \quad (G = \infty) \quad (3.6)$$

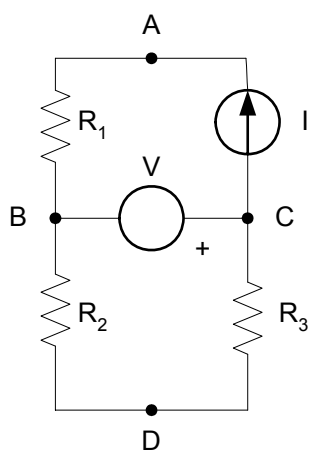
Ovaj slučaj se naziva *kratak spoj*. Napon između pristupa kod kratkog spoja je jednak nuli, a struja može imati ma kakvu vrednost.

$$G = 0 \quad (R = \infty) \quad (3.7)$$

Ovaj slučaj se naziva *otvorena veza*. Napon između pristupa kod otvorene veze može imati ma kakvu vrednost, a struja je jednaka nuli.

3.2 Električno kolo

Električno kolo predstavlja interkonekciju dva ili više elemenata. Povezivanje elemenata se vrši provodnicima čija se otpornost može zanemariti.



Slika 3.2: Primer jednog električnog kola.

Pre nego što formulišemo osnovne zakone koji opisuju ponašanje električnih kola, moramo se upoznati sa nekoliko definicija osnovnih termina:

Čvor kola je tačka spajanja dva ili više elemenata kola (A, B, C, D, na sl. 3.2).

Grana je deo kola koji sadrži samo jedan element i čvorove na krajevima elementa (AB, AC, BC, BD, CD, na sl. 3.2).

Petlja predstavlja ma koji zatvoreni put kroz kolo kod koga se kroz jedan čvor može proći samo jednom (ACBA, BCDB, ACDBA, na sl. 3.2).

Kontura predstavlja petlju koji ne sadrži u sebi neku drugu petlju (ACBA, BCDB, na sl. 3.2).

3.3 Prvi (strujni) Kirhofov zakon

Nemački fizičar Gustav Kirhof je još sredinom 19. veka formulisao dva osnovna zakona koji opisuju ponašanje električnih kola. Prvi Kirhofov zakon se odnosi na struje u kolu i glasi: *Algebarska suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli.*

$$\sum_{j=1}^N I_j = 0 \quad (3.8)$$

gde je I_j struja j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. Po konvenciji se struje čija je referentna orijentacija ka čvoru uzimaju se sa pozitivnim predznakom, dok se struje čija je referentna orijentacija od čvora uzimaju sa negativnim predznakom.

Alternativna formulacija prvog Kirhofovog zakona glasi:

Suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je sumi struja koje ističu iz istog čvora.

3.4 Drugi (naponski) Kirhofov zakon

Drugi Kirhofov zakon se odnosi na napone u kolu i glasi: *Algebarska suma napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.*

$$\sum_{j=1}^N V_j = 0 \quad (3.9)$$

gde je V_j napon na j -toj grani petlje koja ukupno ima N grana. Po konvenciji se naponi na granama čija je referentna orijentacija suprotna orijentaciji petlje uzimaju se sa pozitivnim predznakom, dok se naponi na granama čija je referentna orijentacija ista sa orijentacijom petlje uzimaju sa negativnim predznakom.

3.5 Paralelna i serijska veza otpornika

Prvi i drugi Kirhofov zakon opisuju stanje svakog električnog kola. Međutim, kada se primene na kola sa samo jednim parom čvorova, ili na kola sa samo jednom petljom, oni daju neke vrlo korisne rezultate, koji se mogu primeniti za uprošćavanje električnih kola.

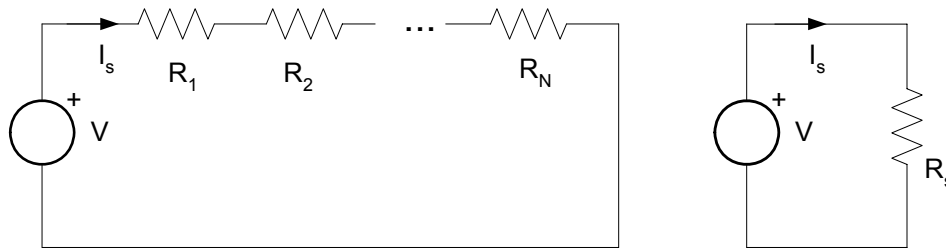
3.5.1 Serijska (redna) veza otpornika

Ako se N otpornika tako poveže tako da se u svakom čvoru stiču samo po dva otpornika (osim kod prvog i poslednjeg čvora), takva veza se naziva *serijska* ili *redna veza* otpornika i prikazana je na slici 3.3a. Za jedinu petlju u kolu se može napisati jednačina po drugom Kirhofovom zakonu:

$$V = R_1 I_s + R_2 I_s + \dots + R_N I_s = (R_1 + R_2 + \dots + R_N) I_s \quad (3.10)$$

dok se za ekvivalentnu petlju na slici 3.3b može napisati:

$$V = R_s I_s \quad (3.11)$$



Slika 3.3: Serijska (redna) veza otpornika.

Ako su napon izvora i struja kroz izvor u oba kola isti, onda se za ekvivalentnu otpornost R_s dobija:

$$R_s = R_1 + R_2 + \dots + R_N \quad (3.12)$$

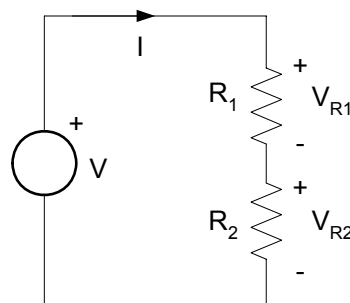
odnosno, *ekvivalentna otpornost serijski vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih otpornosti.*

Posmatrajmo dva serijski vezana otpornika, kao na slici 3.4. Pošto kroz oba otpornika protiče ista struja i , naponi na serijski vezanim otpornicima su:

$$V_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V, \quad V_{R_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V \quad (3.13)$$

odnosno, *napon izvora V deli se između otpornika R_1 i R_2 u direktnoj srazmeri sa njihovim otpornostima.*

Ovakvo kolo se naziva *delitelj (razdelnik) napona* i često se primenjuje u elektronici.



Slika 3.4: Delitelj (razdelnik) napona.

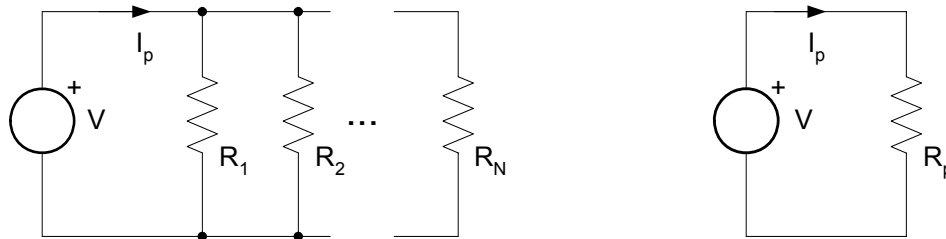
3.5.2 Paralelna veza otpornika

Ako se N otpornika tako poveže da svi imaju zajedničke priključke, takva veza se naziva *paralelna veza* otpornika i prikazana je na slici 3.5a. Za čvor u kome su povezani naponski izvor i svi otpornici se može napisati jednačina po prvom Kirhofovom zakonu:

$$I_p = G_1V + G_2V + \dots + G_NV = (G_1 + G_2 + \dots + G_N)V \quad (3.14)$$

dok se za ekvivalentni čvor na slici 3.5b može napisati:

$$I_p = G_pV \quad (3.15)$$



Slika 3.5: Paralelna veza otpornika.

Ako su napon izvora i struja kroz izvor u oba kola isti, onda se za ekvivalentnu otpornost G_p dobija:

$$G_p = G_1 + G_2 + \dots + G_N \quad (3.16)$$

odnosno, *ekvivalentna provodnost paralelno vezanih otpornika jednaka je zbiru pojedinačnih provodnosti*. Alternativni oblik prethodne jednačine je:

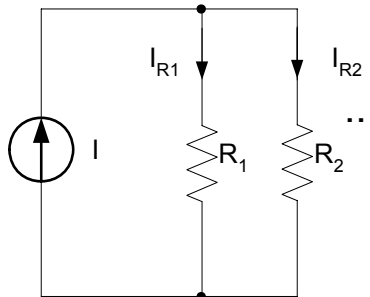
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N} \quad (3.17)$$

Posmatrajmo dva paralelno vezana otpornika, kao na slici 3.6. Pošto je napon na oba otpornika isti, struje kroz paralelno vezane otpornike su:

$$I_{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I, \quad I_{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \quad (3.18)$$

odnosno, *struja izvora I deli se između otpornika R_1 i R_2 u obrnutoj srazmeri sa njihovim otpornostima*.

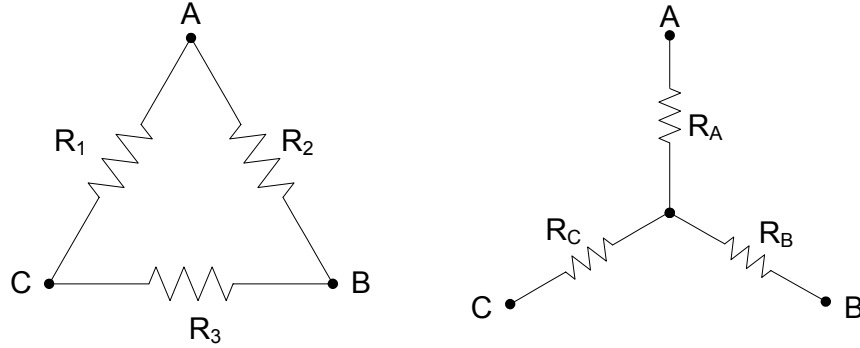
Ovakvo kolo se naziva *delitelj (razdelnik) struje* i često se primenjuje u elektronici.



Slika 3.6: Delitelj (razdelnik) struje.

3.6 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao

Još dve često korišćene transformacije u rešavanju električnih kola su transformacije trougla u zvezdu i obrnuto. Na slici 3.7 je prikazano vezivanje tri otpornika u trougao i zvezdu. U literaturi na engleskom jeziku ove transformacije su poznate kao $\Delta \rightarrow Y$, odnosno, $Y \rightarrow \Delta$.



Slika 3.7: Vezivanje otpornika u trougao (Δ) i zvezdu (Y).

Da bi ova dva kola bila ekvivalentna, otpornost između ma koje dve tačke u oba kola, kada se treća tačka ostavi nepovezana, mora biti ista. Dakle, korišćenjem pravila za paralelno i serijsko vezivanje otpornika, sa slike 3.7 se dobija:

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_A + R_B = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_{BC} &= R_B + R_C = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_{AC} &= R_A + R_C = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina po R_A , R_B i R_C , dobija se:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_B &= \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \\ R_C &= \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \end{aligned} \quad (3.20)$$

dok se rešavanjem sistema jednačina po R_1 , R_2 i R_3 , dobija:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B} \\ R_2 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \\ R_3 &= \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.7 Sistem jednačina napona čvorova

U procesu rešavanja električnog kola potrebno je odrediti struje kroz elemente kola i napone na elementima kola. Za njihovo određivanje možemo napisati sistem linearnih jednačina, koji se sastoji od jednačina po prvom Kirhofovom zakonu, jednačina po drugom Kirhofovom zakonu i jednačina elemenata po Omovom zakonu. Prilikom određivanja napona u kolu, jedan čvor u kolu se bira za *referentni čvor*, pa se preostali naponi računaju u odnosu na njega. Referentni čvor se najčešće naziva *masa*.

Ovako formirani sistem ima veliki broj jednačina. Da bi se smanjio broj jednačina u sistemu može se postupiti na dva načina. Prvi način je da se prvo odrede svi naponi u kolu, a da se potom odrede struje kroz elemente na osnovu Omovog zakona. Drugi način je da se prvo odrede struje u kolu, pa tek onda naponi na elementima. U oba slučaja se broj jednačina u sistemu značajno smanjuje.

U elektronskim kolima je broj čvorova obično znatno manji od broja elemenata, pa je prvi način formiranja jednačina korisniji. Da bi se formirao takav sistem jednačina, prvo se za svaki čvor (osim za referentni) napiše odgovarajuća jednačina po prvom Kirhofovom zakonu, a zatim se struje koje utiču u čvor ili ističu iz čvora izraze preko napona čvorova i Omovog zakona. U slučaju kola sa N čvorova, broj jednačina u sistemu je $N - 1$. Takav sistem jednačina se naziva *sistem jednačina napona čvorova*.

Po Omovom zakonu struja kroz otpornik između čvorova m i n je:

$$I_{mn} = \frac{V_m - V_n}{R} \quad (3.22)$$

Ova struja se pojavljuje samo u jednačinama po prvom Kirhofovom zakonu napisanom za čvorove m i n .

U slučaju kola sa N čvorova, broj nepoznatih veličina (napona) u sistemu $N-1$, tj. isti je kao broj jednačina. Dakle, posle sređivanja napisanih jednačina, koje se sastoji u grupisanju članova koji odgovaraju istim nepoznatim naponima i prebacivanja konstantnih članova na desnu stranu jednačina, formirani sistem izgleda ovako:

$$\begin{aligned} G_{11}V_1 + G_{12}V_2 + \dots + G_{1,N-1}V_{N-1} &= I_1 \\ G_{21}V_1 + G_{22}V_2 + \dots + G_{2,N-1}V_{N-1} &= I_2 \\ \vdots & \\ G_{N-11}V_1 + G_{N-12}V_2 + \dots + G_{N-1,N-1}V_{N-1} &= I_{N-1} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ovaj sistem jednačina se može i direktno napisati na osnovu posmatranja kola, bez prethodnog formiranja jednačina po prvom Kirhofovom zakonu. Koeficijenti van glavne dijagonale G_{mn} , gde je $m \neq n$, predstavljaju zbir provodnosti svih grana između čvorova m i n i uvek imaju negativni predznak. Dijagonalni koeficijenti G_{kk} predstavljaju zbir provodnosti svih grana koje se stiču u čvor k i uvek imaju pozitivni predznak.

3.8 Linearna kola: principi superpozicije i homogenosti

U elektrotehnici i elektronici veliku primenu ima klasa *linearnih kola*. Da bi kolo bilo linearno mora zadovoljiti principe *superpozicije* i *homogenosti*.

Princip superpozicije tvrdi da se u jednom linearnom kolu sa više nezavisnih izvora, struja kroz ma koji element ili napon bilo kog čvora u kolu, može biti predstavljen kao algebarski zbir doprinosa pojedinačnih izvora. Prilikom određivanja doprinosa jednog izvora, preostali nezavisni naponski izvori moraju biti zamenjeni kratkim spojevima, a preostali nezavisni strujni izvori se moraju zameniti otvorenim vezama. Zavisni izvori ostaju neizmenjeni u kolu.

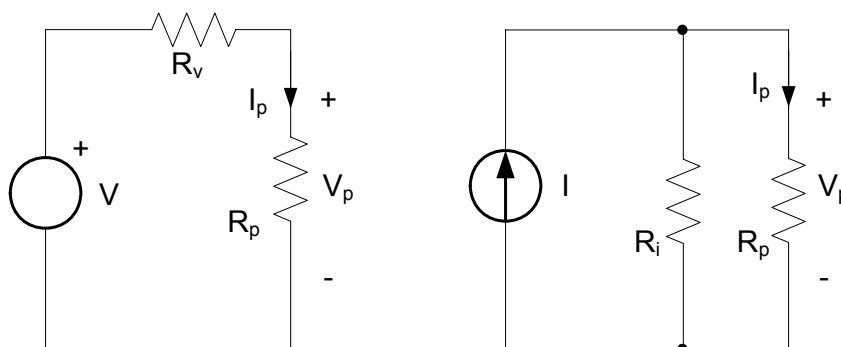
Iako primena principa superpozicije zahteva višestruko rešavanje sistema jednačina, sistemi jednačina koji se dobijaju posle anuliranja preostalih nezavisnih izvora su često znatno jednostavniji, pa njihovo rešavanje ne predstavlja problem.

Princip homogenosti tvrdi da ako se u jednom linearnom kolu neki nezavisni izvor pomnoži (skalira) nekom konstantom, onda se njegovi doprinosi strujama i naponima u kolu množe istom konstantom.

Dokaz ovih principa sledi iz linearnosti sistema jednačina koje opisuju kolo.

3.9 Transformacija izvora

U električnim kolima se retko sreću idealni naponski i strujni izvori. Realni naponski izvor, prikazan na slici 3.8, ima konačnu unutrašnju otpornost R_v . Realni strujni izvor, takođe prikazan na slici 3.8, ima konačnu unutrašnju provodnost $G_i = 1/R_i$.



Slika 3.8: Realni strujni izvor i realni naponski izvor.

U cilju uprošćenja kola, ponekad je pogodno pretvoriti strujni izvor u ekvivalentni naponski izvor i obrnuto. Do uslova ekvivalencije se lako može doći posmatranjem slike 3.8. Ako se na realni strujni ili naponski izvor priključi isti otpornik proizvoljne otpornosti R_p , onda u slučaju ekvivalentnih izvora struja kroz otpornik R_p mora biti isti u oba kola. Po Omovom zakonu, onda je isti i napon na otporniku R_p . Dakle, iz uslova jednakosti struja kroz R_p sledi:

$$I_p = \frac{1}{R_v + R_p} V = \frac{R_i}{R_i + R_p} I \quad (3.24)$$

odakle se direktno dobijaju uslovi ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora:

$$V = R_i I, \quad R_v = R_i \quad (3.25)$$

Dakle, ako u kolu imamo strujni izvor struje I i njemu paralelno vezan otpornik R , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim naponskim izvorom napona $V = RI$ i serijski vezanim otpornikom R . Takođe važi i obrnuto: ako u kolu imamo naponski izvor napona V sa

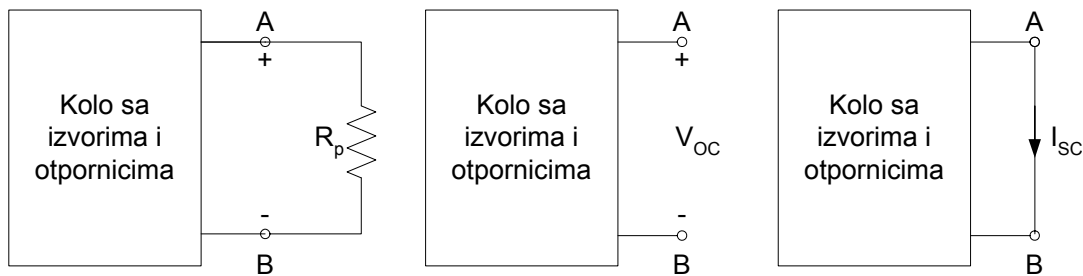
serijski vezanim otpornikom R , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim strujnim izvorom struje $I = V/R$ i njemu paralelno vezanim otpornikom R . Ostali parametri kola u kome se nalaze nezavisni izvori ostaju nepromenjeni.

Transformacije izvora imaju veliku primenu u uprošćavanju električnih kola, kada je potrebno smanjiti broj čvorova ili smanjiti broj petlji u kolu.

3.10 Tevenenova i Nortonova teorema

Pretpostavimo da imamo neko električno kolo i da želimo da odredimo struju, napon ili snagu na nekom otporniku, koji ćemo nazvati *potrošač* i obeležiti sa R_p . Ova situacija je ilustrovan na slici 3.10a. Tevenenova i Nortonova teorema pokazuju kako se celo kolo, osim potrošača, može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim ili strujnim izvorom, tako da struja i napon potrošača ostanu nepromenjeni.

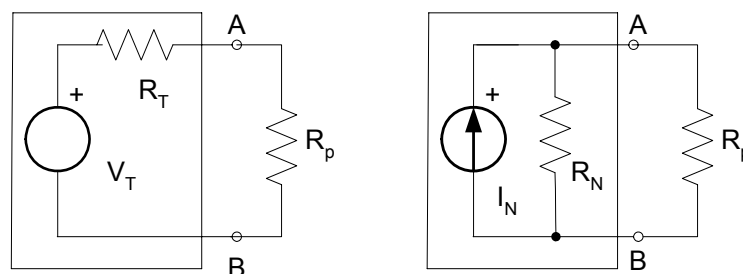
Posmatrajmo kolo na sl. 3.10a. Ako se potrošač isključi iz kola, pristupni krajevi ostaju otvoreni, i na njima postoji napon, koji ćemo nazvati napon otvorene veze i obeležiti sa V_{OC} , kao na slici 3.10b. Međutim, ako se posle isključenja potrošača pristupni krajevi kratko spoje, onda između njih postoji struja kratkog spoja, koju ćemo obeležiti sa I_{SC} , kao na slici 3.10c.



Slika 3.10: Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

Za izvođenje *Tevenenove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 3.11a, u kome je kompletno kolo sa izvorima i otpornicima (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim naponskim izvorom V_T i serijski vezanim otpornikom R_T . Poređenjem kola sa slike 3.10 i slike 3.11a, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$V_T = V_{OC}, \quad R_T = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \quad (3.26)$$



Slika 3.11: Tevenenovo i Nortonovo ekvivalentno kolo.

Ove relacije predstavljaju Tevenenovu teoremu koja glasi:

Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i otpornicima se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog naponskog izvora V_T , čiji je napon jednak naponu kola sa isključenim potrošačem V_{OC} , i serijskog otpornika R_T , čija je otpornost jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

Za izvođenje *Nortonove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 3.11b, u kome je kompletno kolo sa izvorima i otpornicima (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim strujnim izvorom I_N i paralelno vezanim otpornikom R_N . Poređenjem kola sa slike 3.10 i slike 3.11b, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$I_N = I_{SC}, \quad R_N = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} \quad (3.27)$$

Ove relacije predstavljaju Nortonovu teoremu koja glasi:

Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i otpornicima se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog strujnog izvora I_N , čija je struja jednaka struji kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} , i paralelnog otpornika R_N , čija je otpornost jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem V_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač I_{SC} .

Specijalni slučaj Tevenenove i Nortonove teoreme nastaje kada kolo čiji se ekvivalent traži *sadrži samo nezavisne izvore*, odnosno ne sadrži zavisne izvore. Tada se izračunavanje ekvivalentne otpornosti R_T ili R_N može uprostiti. Umesto potrošača na krajeve A i B priključi se naponski generator V_T , nezavisni izvori u kolu se anuliraju kratkospajanjem nezavisnih naponskih izvora i raskidanjem nezavisnih strujnih izvora, zatim se odredi struja kroz test generator I_T , i na kraju ekvivalentna otpornost $R_T = V_T / I_T$.

Isti postupak se može sprovesti i priključivanjem strujnog test generatora, I_T , i određivanjem napona na njemu, V_T . Odluka o tome koji postupak treba primeniti zavisi od toga kolika uprošćenja donosi jedan ili drugi način.

Equation Section (Next)

4. Kola sa promenljivim strujama

U elektronskim kolima se često dešava da se struktura kola menja otvaranjem ili zatvaranjem nekog prekidača. Posle takve promene nastaje promena napona i struja u kolu koja se odvija po određenim zakonitostima, a koje ćemo proučavati u ovom poglavlju. Takva analiza kola se naziva *analiza prelaznog režima*.

U odvijanju prelaznih pojava ključnu ulogu imaju dva pasivna elementa koje smo već pomenuli: kondenzator i kalem. Oba ova elementa imaju neke zajedničke osobine. Oni su linearni elementi jer je kod njih relacija između struje i napona predstavljena linearnim diferencijalnim jednačinama. Takođe, oba elementa imaju sposobnost akumulacije energije. Kod kondenzatora energija se akumulira u električnom polju, a kod kalema u magnetskom polju. Akumulirana energija se može predati ostatku kola. Zbog ove osobine akumulacije energije, kondenzator i kalem se nazivaju i *reaktivni elementi*.

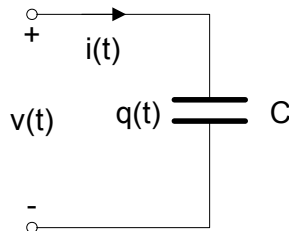
4.1 Kondenzator

Kondenzator se sastoji od dve provodne površine razdvojene izolacionim materijalom (*dielektrikom*). Opterećenje kondenzatora, čiji je simbol zajedno sa referentnim smerovima za napon i struju prikazan na slici 4.1, srazmerno je naponu na kondenzatoru:

$$Q = CV \quad (4.1)$$

Konstanta C u prethodnom izrazu naziva se *kapacitivnost (kapacitet)* kondenzatora.

Ako se napon na kondenzatoru ne menja, pošto su elektrode kondenzatora izolovane dielektrikom, nema stalne struje kroz kondenzator. Dakle, *pri konstantnoj pobudi kondenzator se ponaša kao otvorena veza*.



Slika 4.1: Simbol kondenzatora i referentni smerovi za struju i napon.

Međutim, ako se napon na kondenzatoru menja sa vremenom, menjaće se i njegovo električno opterećenje:

$$q(t) = Cv(t) \quad (4.2)$$

Diferenciranjem ove jednačine po vremenu se dobija:

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Dakle, ako se napon na kondenzatoru menja, opterećenje na kondenzatoru se takođe menja, što znači da postoji struja kroz kondenzator.

Iz poslednje jednačine se takođe vidi da nije moguće naglo promeniti napon na kondenzatoru jer bi to zahtevalo beskonačno veliku struju kroz njega.

Integracijom jednačine (4.3) se dobija:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t_0} i(x) dx + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx \quad (4.4)$$

gde se $v(t_0)$ naziva početni napon na kondenzatoru.

Energija akumulirana u električnom polju kondenzatora se može odrediti iz snage koja se predaje kondenzatoru:

$$w_c(t) = \int_{-\infty}^t p_c(x) dx = \int_{-\infty}^t v(x) C \frac{dv(x)}{dx} dx = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (4.5)$$

Kapacitet kondenzatora u praksi kreće se od pikofarada ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$) do farada. Realni kondenzatori nemaju idealni dielektrik, tako da postoji slaba provodnost između dve ploče. Neidealni dielektrik se modeluje vezivanjem otpornika velike otpornosti paralelno kondenzatoru.

Slično otpornicima, i kondenzatori se mogu vezivati paralelno ili serijski. Koristeći I Kirhofov zakon, lako se može pokazati da ekvivalentna kapacitivnost paralelne veze kondenzatora predstavlja zbir kapacitivnosti paralelno vezanih kondenzatora:

$$C_p = C_1 + C_2 + \dots + C_N \quad (4.6)$$

Korišćenjem II Kirhofovog zakona, lako se dobija da recipročna vrednost ekvivalentne kapacitivnosti serijske veze kondenzatora predstavlja zbir recipročnih vrednosti kapacitivnosti serijski vezanih kondenzatora:

$$\frac{1}{C_p} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N} \quad (4.7)$$

4.2 Kalem

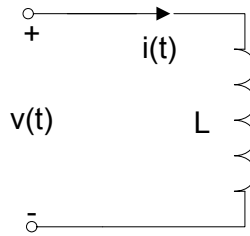
Kalem se sastoji od provodne žice koja je namotana oko jezgra od nemagnetnog ili magnetnog materijala. Simbol kalema, zajedno sa referentnim smerovima za napon i struju prikazan je na slici 4.2.

Relacija između napona i struje kalema data je diferencijalnom jednačinom:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (4.8)$$

Konstanta L u prethodnom izrazu naziva se *induktivnost* kalema.

Ako je struja kroz kalem konstantna, njen prvi izvod je nula, pa je napon na kalemu takođe nula. Dakle, u stalnom jednosmernom režimu kalem se ponaša kao kratak spoj.



Slika 4.2: Simbol kalema i referentni smerovi za struju i napon.

Postupajući na sličan način kao kod kondenzatora, integracijom jednačine (4.8) se dobija:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(x) dx = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx \quad (4.9)$$

gde je $i(t_0)$ početna struja kroz kalem.

Energija akumulirana u magnetskom polju kalema može se odrediti iz snage koja se predaje kalem:

$$w_L(t) = \int_{-\infty}^t p_L(x) dx = \int_{-\infty}^t L \frac{di(x)}{dx} i(x) dx = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (4.10)$$

Induktivnost kalemova u praksi se kreće od μH do nekoliko H. Realni kalemovi imaju malu, ali konačnu otpornost žice, tako da disipiraju energiju. Neidealni kalem se modeluje vezivanjem otpornika male otpornosti na red sa kalemom.

Kalemovi se mogu povezivati paralelno ili serijski. U slučaju paralelne veza kalemova, iz I Kirhofovog zakona sledi da *recipročna vrednost ekvivalentne induktivnosti paralelne veze kalemova predstavlja zbir recipročnih vrednosti induktivnosti paralelno vezanih kalemova*:

$$\frac{1}{L_p} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N} \quad (4.11)$$

Korišćenjem II Kirhofovog zakona, dobija se da *ekvivalentna induktivnost serijske veze kalemova predstavlja zbir vrednosti induktivnosti serijski vezanih kalemova*:

$$L_s = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (4.12)$$

4.3 Kola prvog reda sa kondenzatorima i kalemovima

Kola prvog reda sadrže izvore, otpornike i jedan kondenzator (*RC kola*) ili jedan kalem (*RL kola*) i prikazana su na slici 4.3.

Da bi posmatrali prelazni režim kod kola prvog reda, smatraćemo da se prekidač, koji je bio otvoren, zatvara u trenutku $t = 0$, čime se pobudni izvor vezuje u kolo. Ponašanje RC kola za $t > 0$ određeno je drugim Kirhofovom zakonom, koji za kolo sa slike 4.3a glasi:

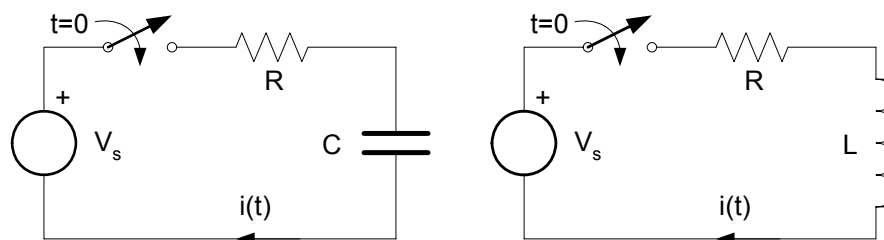
$$\frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(x) dx + Ri(t) = V_s \quad (4.13)$$

čijim se diferenciranjem po vremenu dobija:

$$\frac{i(t)}{C} + R \frac{di(t)}{dt} = 0 \quad (4.14)$$

ili, posle sređivanja,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC} i(t) = 0 \quad (4.15)$$



Slika 4.3: Kola prvog reda: RC kolo i RL kolo.

Ponašanje RL kola za $t > 0$ određeno je drugim Kirhofovim zakonom, koji za kolo sa slike 4.3a glasi:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_s \quad (4.16)$$

ili, posle sređivanja,

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{V_s}{L} \quad (4.17)$$

Poređenjem diferencijalnih jednačina za RC kolo (4.15) i RL kolo (4.17), vidi se da se oba kola mogu opisati diferencijalnom jednačinom oblika:

$$\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = f(t) \quad (4.18)$$

Iz matematike je poznato da se rešenje diferencijalne jednačine (4.18) može uvek predstaviti u obliku:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (4.19)$$

gde je $x_p(t)$ *prinudno rešenje*, koje predstavlja ma koje rešenje diferencijalne jednačine:

$$\frac{dx_p(t)}{dt} + ax_p(t) = f(t) \quad (4.20)$$

dok je $x_c(t)$ *prirodno rešenje*, koje predstavlja rešenje homogene diferencijalne jednačine:

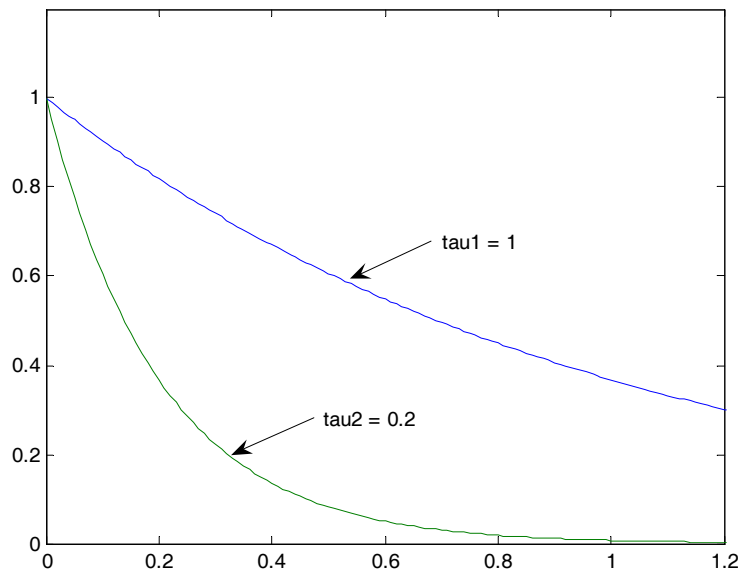
$$\frac{dx_c(t)}{dt} + ax_c(t) = 0 \quad (4.21)$$

Iz jednačine koja daje prirodno rešenje (4.20) se vidi da rešenje $x_c(t)$ i njegov izvod $dx_c(t)/dt$ moraju imati isti vremenski oblik, jer se inače ne bi mogli poništiti. Jedan mogući oblik za $x_c(t)$ je eksponencijalna funkcija $x_c(t) = Ke^{-at}$. Što se prinudnog rešenja $x_p(t)$ tiče, ono se mora sastojati od funkcije $f(t)$ i njenog prvog izvoda $df(t)/dt$. Izuzetak od ovog pravila predstavlja slučaj $f(t) = Ae^{-at}$, gde je a ista konstanta kao u diferencijalnoj jednačini.

U slučaju posmatranih RC i RL kola, $f(t) = A = \text{const}$, pa je prinudno rešenje diferencijalne jednačine takođe konstanta $x_p(t) = K_1$. Prirodno rešenje je, kao što je već rečeno, eksponencijalnog oblika $x_c(t) = K_2e^{-at}$. Kompletno rešenje diferencijalne jednačine je onda:

$$x(t) = K_1 + K_2e^{-at} = K_1 + K_2e^{-t/\tau} \quad (4.22)$$

Konstanta $\tau = 1/a$ naziva se *vremenska konstanta kola*. Za RC kolo, $\tau = RC$, dok je za RL kolo $\tau = L/R$. Vremenska konstanta kola određuje brzinu kojom se odvijaju promene napona ili struja u kolu. Lako je pokazati da se za vreme $t = \tau$ posmatrana veličina $x(t)$ promeni za 63.2% od ukupne moguće promene, dok se za vreme $t = 5\tau$ ista veličina promeni za 99.3%. Dakle, *posle pet vremenskih konstanti prelazni proces je praktično završen*. Ova analiza pokazuje da velika vremenska konstanta znači sporo odvijanje promena veličina u kolu, a da mala vremenska konstanta znači brzo odvijanje promena veličina u kolu. Za ilustraciju ove činjenice, na slici 4.4 su prikazani oblici rešenja (4.22) dobijeni za dve vrednosti vremenske konstante $\tau_1 = 1$ i $\tau_2 = 0.2$, dok su ostali parametri isti: $K_1 = 0$ i $K_2 = 1$.



Slika 4.4: Zavisnost brzine promene odziva od vremenske konstante.

Primitimo da drugi član u rešenju (4.22) teži ka nuli kada $t \rightarrow \infty$. Dakle:

$$K_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x(\infty) \quad (4.23)$$

Konstanta K_1 se naziva *ravnotežno rešenje*.

Takođe se, iz uslova:

$$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x(0) = K_1 + K_2 = x(\infty) + K_2 \quad (4.24)$$

dobija:

$$K_2 = x(0) - x(\infty) \quad (4.25)$$

tako da se konačno rešenje (4.22) može napisati i u obliku:

$$x(t) = x(\infty) + [x(0) - x(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (4.26)$$

koji može korisno poslužiti za direktno pisanje jednačine za promenljivi napon ili struju, ako su poznate veličine $x(0)$, $x(\infty)$ i τ .

Rezime analize kola prvog reda:

1. Analizira se kolo pre promene stanja prekidača, da bi se odredio početni napon na kondenzatoru $v_C(0)$ ili početna struja kalema $i_L(0)$.
2. Posle promene stanja prekidača, ponovo se analizira kolo da bi se odredili napon na kondenzatoru $v_C(t)$ ili struja kalema $i_L(t)$.
3. Početni i finalni uslovi u kolu se koriste da bi se odredile konstante K_1 i K_2 u dobijenom rešenju.
4. Ukoliko tražena nepoznata veličina nije napon na kondenzatoru $v_C(t)$ ili struja kalema $i_L(t)$, koriste se jednačine kola da bi se odredila tražena veličina.

Rezultati koji su izvedeni u ovom poglavlju mogu se uspešno primeniti i na složenija kola. Primenom Tevenenove ili Nortonove teoreme, deo kola sa otpornicima i izvorima se može predstaviti ekvivalentnim izvorom i otpornikom, a više kondenzatora ili kalemova se mogu ekvivalentirati jednim kondenzatorom ili kalemom ukoliko su vezani paralelno ili serijski.

4.4 Kola drugog reda sa kondenzatorima i kalemovima

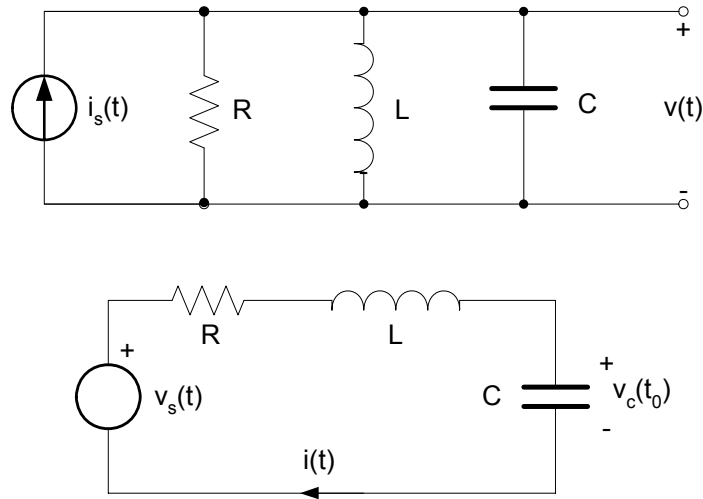
Nešto složeniji slučaj za analizu nastaje kada su kondenzator i kalem istovremeno prisutni u kolu. Tada se dobijaju električna kola sačinjena od izvora, otpornika, kondenzatora i kalema (*RLC kola*), koja su predstavljena na slici 4.5.

Ako postoji početna energija u kalemom i kondenzatoru, onda se za prvo RLC kolo može napisati jednačina po I Kirhofovom zakonu:

$$\frac{v(t)}{R} + i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(x) dx + C \frac{dv(t)}{dt} = i_s(t) \quad (4.27)$$

dok se za drugo RLC kolo može napisati jednačina po II Kirhofovom zakonu:

$$Ri(t) + v_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(x) dx + L \frac{di(t)}{dt} = v_s(t) \quad (4.28)$$



Slika 4.5: Kola drugog reda (RLC kola).

Ako se obe jednačine diferenciraju po vremenu, a zatim prva podeli sa C a druga sa L , onda se dobija:

$$\frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{C} \frac{di_s(t)}{dt} \quad (4.29)$$

odnosno,

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = \frac{1}{L} \frac{dv_s(t)}{dt} \quad (4.30)$$

Dakle, oba kola se mogu opisati diferencijalnom jednačinom drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t) \quad (4.31)$$

čije je rešenje:

$$x(t) = x_p(t) + x_c(t) \quad (4.32)$$

gde je $x_p(t)$ prinudno rešenje, a $x_c(t)$ prirodno rešenje.

Ako je pobudna funkcija konstanta, $f(t) = A$, kao na slici 4.5, onda je prinudno rešenje $x_p(t)$ rešenje jednačine:

$$\frac{d^2 x_p(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx_p(t)}{dt} + a_2 x_p(t) = A \quad (4.33)$$

Iz činjenice da prinudno rešenje mora biti sačinjeno od funkcije $f(t) = A$ i njenog prvog izvoda $df(t)/dt = 0$ sledi:

$$x_p(t) = A/a_2 \quad (4.34)$$

Homogena jednačina iz koje se dobija prirodno rešenje se može napisati i u obliku:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (4.35)$$

Smenom $x(t) = Ke^{st} \neq 0$, ova jednačina postaje algebarska jednačina:

$$s^2 Ke^{st} + 2\alpha s Ke^{st} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0 \quad (4.36)$$

ili

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (4.37)$$

Ova jednačina se naziva *karakteristična jednačina*, koeficijent α se naziva *koeficijent prigušenja*, a dok se ω_0 naziva *rezonantna učestanost*. Rešenja ove kvadratne jednačine su:

$$s_1, s_2 = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.38)$$

i nazivaju se *prirodne (sopstvene) učestanosti*. Rešenja homogene diferencijalne jednačine (4.35) su:

$$x_1(t) = K_1 e^{s_1 t}, \quad x_2(t) = K_2 e^{s_2 t} \quad (4.39)$$

a njihov zbir takođe predstavlja prirodno rešenje:

$$x_c(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (4.40)$$

Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova $x(0)$ i $dx(0)/dt$.

Zavisno od vrednosti parametara α i ω_0 , razlikuju se tri slučaja:

1. $\alpha > \omega_0$ - *prigušeno rešenje*. Rešenja s_1 i s_2 su realna i nejednaka, pa je prirodno rešenje oblika:

$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + K_2 e^{-(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \quad (4.41)$$

i predstavlja zbir dve opadajuće eksponencijalne funkcije. Konstante K_1 i K_2 se određuju iz početnih uslova.

2. $\alpha = \omega_0$ - *kritično prigušeno rešenje*. Rešenja s_1 i s_2 su realna i jednaka, pa je prirodno rešenje oblika:

$$x_c(t) = B_1 e^{-\alpha t} + B_2 t e^{-\alpha t} \quad (4.42)$$

Konstante B_1 i B_2 se određuju iz početnih uslova.

3. $\alpha < \omega_0$ - neprigušeno rešenje. Rešenja s_1 i s_2 su konjugovano kompleksna, pa je prirodno rešenje oblika:

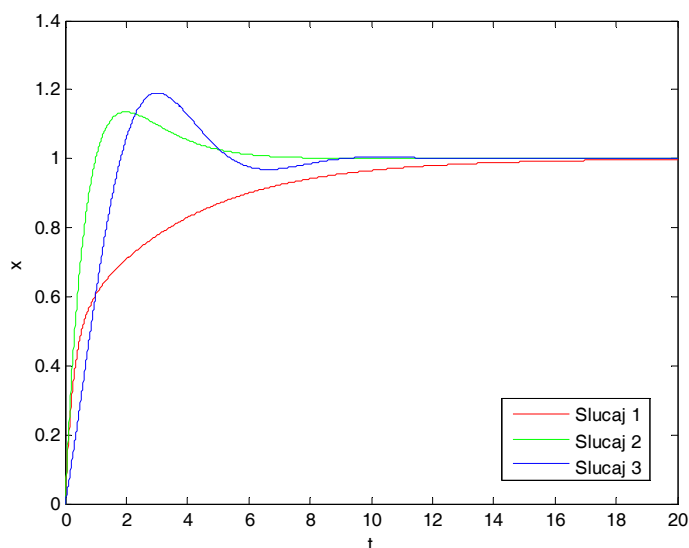
$$x_c(t) = K_1 e^{-(\alpha - j\omega_n)t} + K_2 e^{-(\alpha + j\omega_n)t} = e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_n t + A_2 \sin \omega_n t) \quad (4.43)$$

gde je:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (4.44)$$

Dobijeno rešenje ima oscilatorni karakter sa eksponencijalno opadajućom amplitudom oscilacija. Konstante A_1 i A_2 se određuju iz početnih uslova.

Na slici 4.6 prikazani su odzivi kola u sva tri slučaja, za iste početne uslove i istu učestanost $\omega_0 = 1$ i tri vrednosti koeficijenta prigušenja α , $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ i $\alpha = 0.5$. Uočava se da je odziv kola najbrži u slučaju kritičnog prigušenja.



Slika 4.6: Tri slučaja odziva kola drugog reda.

Equation Section (Next)

5. Kola sa naizmeničnim strujama

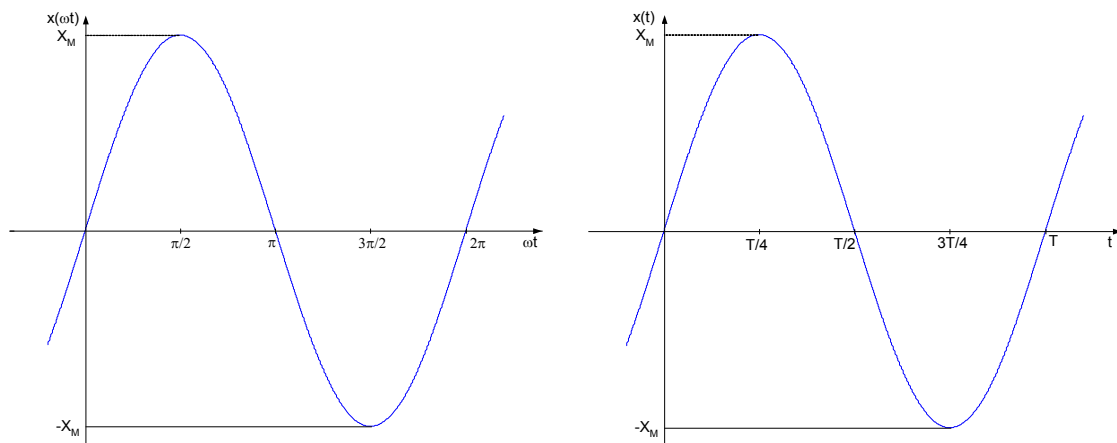
Posebna klasa električnih kola su kola kod kojih su naponi i struje pobudnih izvora sinusoidalne funkcije vremena. U režimu koji nastaje posle smirivanja prelaznih pojava, naponi i struje elemenata kola će takođe imati isti vremenski oblik, tj. predstavljaju sinusoidalne funkcije vremena. U elektrotehnici je interes za proučavanje ovakvih kola veliki s obzirom na činjenicu da je naizmenični napon dominantan u snabdevanju električnom energijom u domaćinstvima i industriji. Takođe, pošto se primenom Furijeove analize može pokazati da se bilo kakva periodična funkcija može predstaviti zbirom sinusoidalnih funkcija, za analizu kola sa složenim periodičnim pobudama može se primeniti princip superpozicije.

5.1 Osnovni pojmovi

Posmatraćemo prvo kola kod kojih pobudni izvori predstavljaju *sinusoidalne funkcije vremena*. Analiziraćemo *ustaljeno, stacionarno ili ravnotežno* stanje, koje nastaje posle smirivanja prelaznih procesa u kolu posle primene sinusoidalne pobude, a kada su naponi i struje u kolu takođe sinusoidalni, odnosno *prostoperiodični*. Posmatrajmo sinusnu funkciju:

$$x(t) = X_M \sin \omega t \quad (5.1)$$

koja je prikazana na slici 5.1. X_M se naziva *amplituda* (maksimalna vrednost), ω se naziva *kružna ili ugaona učestanost*, dok je ωt *argument*. Veličina $x(t)$ može predstavljati napon $v(t)$ ili struju $i(t)$.



Slika 5.1: Sinusna funkcija u funkciji argumenta ωt i vremena t .

Ova funkcija je periodična sa periodom od 2π radijana. Period ove funkcije T i učestanost sinusoide f su povezani relacijom:

$$f = \frac{1}{T} \quad (5.2)$$

Iz uslova periodičnosti:

$$\omega T = 2\pi \quad (5.3)$$

sledi:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (5.4)$$

Nešto opštiji oblik sinusoidalne funkcije je:

$$x(t) = X_M \sin(\omega t + \theta) \quad (5.5)$$

gde je θ fazni ugao ili početna faza.

5.2 Predstavljanje sinusoidalnih veličina kompleksnim brojevima

Posmatrajmo jedno RL kolo pobuđeno naponskim sinusoidalnim izvorom. Onda se po II Kirhofovom zakonu može pisati:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = V_M \cos \omega t \quad (5.6)$$

Pošto je pobuda sinusoidalna, struja mora biti oblika:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) \quad (5.7)$$

Zamenom u prethodnu diferencijalnu jednačinu i rešavanjem po nepoznatima I_M i ϕ , posle dužeg izračunavanja se dobija:

$$I_M = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \phi = -\arctg \frac{\omega L}{R} \quad (5.8)$$

pa je:

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right) \quad (5.9)$$

Kao što se vidi, do rešenja smo došli na komplikovan i dugotrajan način. Jednostavniji način rešavanja se dobija uspostavljanjem veze između sinusoidalnih funkcija i kompleksnih brojeva. Ova veza dovodi do algebarskih jednačina po prvom i drugom Kirhofovom zakonu, koje zamenjuju odgovarajuće diferencijalne jednačine.

Poći ćemo od Ojlerove predstave kompleksnog broja:

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (5.10)$$

čiji su realni i imaginarni deo kosinusna odnosno sinusna funkcija. Pretpostavimo da je pobudna funkcija (fizički neostvarljivi) kompleksni napon:

$$v(t) = V_M e^{j\omega t} = V_M (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (5.11)$$

čiji su realni i imaginarni deo fizički ostvarljivi.

Zbog toga što je kolo linearno, po principu superpozicije, struja u kolu mora se sastojati iz dve komponente:

$$i(t) = I_M [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] = I_M e^{j(\omega t + \phi)} \quad (5.12)$$

gde je $I_M \cos(\omega t + \phi)$ odziv na funkciju $V_M \cos \omega t$, a $jI_M \sin(\omega t + \phi)$ odziv na funkciju $jV_M \sin \omega t$.

Dakle, umesto da primenimo pobudu $V_M \cos \omega t$ i sprovedemo odgovarajuća izračunavanja, mi možemo da primenimo pobudu $V_M e^{j\omega t}$, odredimo odziv $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ i nađemo njegov realni deo. Mada to na prvi pogled izgleda mnogo komplikovanije nego prvi pristup, u praksi je sve mnogo jednostavnije. U slučaju posmatranog RL kola, zamenom pobude $V_M e^{j\omega t}$ i odziva $I_M e^{j(\omega t + \phi)}$ u diferencijalnu jednačinu (5.6), imamo:

$$L \frac{d}{dt} (I_M e^{j(\omega t + \phi)}) + RI_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t} \quad (5.13)$$

odakle se posle diferenciranja dobija:

$$j\omega LI_M e^{j(\omega t + \phi)} + RI_M e^{j(\omega t + \phi)} = V_M e^{j\omega t} \quad (5.14)$$

Deljenjem obe strane jednačine (5.14) sa $e^{j\omega t}$ dobija se:

$$RI_M e^{j\phi} + j\omega LI_M e^{j\phi} = V_M \quad (5.15)$$

što je algebarska jednačina sa kompleksnim koeficijentima, čije je rešenje:

$$I = I_M e^{j\phi} = \frac{V_M}{R + j\omega L} = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \arctg(\frac{\omega L}{R})} \quad (5.16)$$

Međutim, pošto je stvarna pobuda $V_M \cos \omega t$ a ne $V_M e^{j\omega t}$, stvarni odziv je realni deo dobijenog rešenja, odnosno:

$$i(t) = I_M \cos(\omega t + \phi) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}) \quad (5.17)$$

što je identično sa rešenjem diferencijalne jednačine (5.9). Dakle, u opštem slučaju imamo:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \phi) = \operatorname{Re} [X_M e^{j(\omega t + \phi)}] = \operatorname{Re} [(X_M e^{j\phi}) e^{j\omega t}] \quad (5.18)$$

Član $e^{j\omega t}$ je zajednički faktor u definicionoj jednačini za kolo i može se implicitno podrazumevati u analizi. Preostali parametri, X_M i ϕ kompletno predstavljaju amplitudu i fazni ugao nepoznate struje ili napona. *Kompleksna predstava struje ili napona* $X_M e^{j\phi}$ naziva se *fazor*.

Fazor $X_M e^{j\phi}$ je kompleksni broj u polarnom obliku kod koga X_M predstavlja amplitudu sinusoidalnog signala, a ϕ predstavlja fazni ugao sinusoidalnog signala meren u odnosu na kosinusoidu. U daljem radu, fazore ćemo označavati velikim slovima koja su podebljana (bold) ili podvučena.

Ako primenimo fazore na analizu RL kola, diferencijalna jednačina (5.6) dobija oblik:

$$L \frac{d}{dt} (\mathbf{I} e^{j\omega t}) + R \mathbf{I} e^{j\omega t} = \mathbf{V} e^{j\omega t} \quad (5.19)$$

gde je $\mathbf{I} = I_M \angle \phi$ i $\mathbf{V} = V_M \angle 0^\circ$. Posle diferenciranja i eliminacije zajedničkog faktora $e^{j\omega t}$ dobija se fazorska jednačina:

$$j\omega L \mathbf{I} + R \mathbf{I} = \mathbf{V} \quad (5.20)$$

odnosno,

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{R + j\omega L} = I_M \angle \phi = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle -\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (5.21)$$

tako da se opet dobija isto rešenje:

$$i(t) = \frac{V_M}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left[\omega t - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \right] \quad (5.22)$$

Analiza kola pomoću fazora predstavlja analizu kola u *frekvencijskom domenu*. U fazorskoj analizi se sistem diferencijalnih jednačina sa sinusoidalnim pobudnim funkcijama u vremenskom domenu transformiše u sistem algebarskih jednačina sa kompleksnim koeficijentima u frekvencijskom domenu. Takav sistem je neuporedivo lakši za rešavanje. Kada se odrede nepoznati fazori, oni se ponovo transformišu u vremenski domen da bi se dobilo rešenje originalnog sistema diferencijalnih jednačina.

5.3 Opis elemenata kola pomoću fazora

U prethodnom izlaganju definisane su relacije između napona i struje za tri osnovna elementa električnih kola: otpornik, kalem i kondenzator. Sada ćemo te relacije iskazati korišćenjem fazora.

U slučaju otpornika, relacija između struje i napona data je Omovim zakonom:

$$v(t) = R i(t) \quad (5.23)$$

Ako je napon na otporniku $v(t) = V_M e^{j(\omega t + \theta_v)}$, struja kroz otpornik je $i(t) = I_M e^{j(\omega t + \theta_i)}$, pa se iz prethodne relacije dobija:

$$V_M e^{j(\omega t + \theta_v)} = R I_M e^{j(\omega t + \theta_i)} \quad (5.24)$$

ili, u fazorskom obliku:

$$\mathbf{V} = R \mathbf{I} \quad (5.25)$$

gde je $\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v$ i $\mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$. Dakle, $\theta_v = \theta_i$, pa su *kod otpornika struja i napon u fazi*.

U slučaju kalema, relacija između napona i struje je diferencijalna jednačina:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.26)$$

koja se može napisati pomoću fazora u obliku:

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I} \quad (5.27)$$

Pošto je $j = 1e^{j90^\circ} = 1 \angle 90^\circ$, onda je $\theta_v = \theta_i + 90^\circ$, pa *kod kalema napon fazno prednjači struji za 90° , ili struja fazno kasni za naponom za 90°* .

U slučaju kondenzatora, relacija između struje i napona je diferencijalna jednačina:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (5.28)$$

koja se može napisati pomoću fazora u obliku:

$$\mathbf{I} = j\omega C \mathbf{V} \quad (5.29)$$

Pošto je $\theta_i = \theta_v + 90^\circ$, *kod kondenzatora struja fazno prednjači naponu za 90° , ili napon fazno kasni za strujom za 90°* .

Pošto fazori predstavljaju kompleksne brojeve, oni se mogu predstaviti i grafički u kompleksnoj ravni. Tako se dobija *fazorski dijagram*. Na osnovu fazorskog dijagrama može se utvrditi odnos amplituda dva fazora, ugao (fazna razlika) između njih, kao i njihov relativni međusobni odnos. Na slici 5.2 su prikazani odnosi između napona i struje u vremenskoj i fazorskoj predstavi za sva tri osnovna pasivna električna elementa.

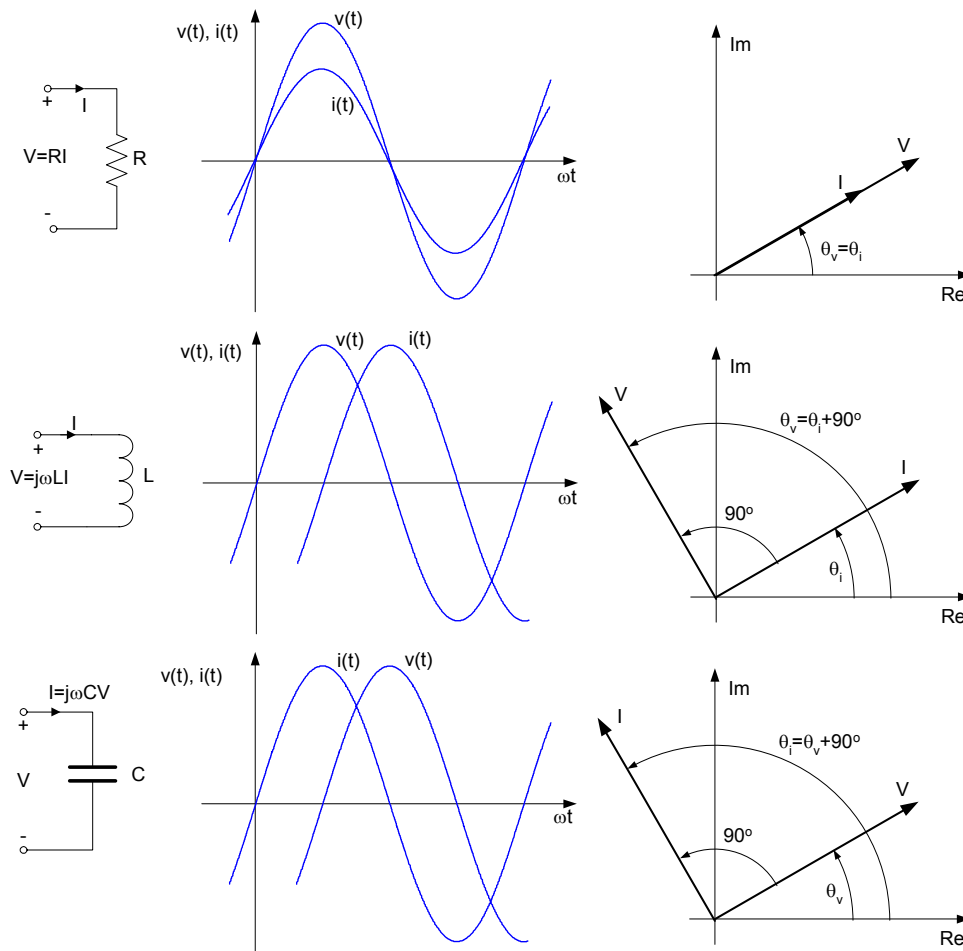
5.4 Uopšteni Omov zakon: impedansa i admitansa

Kod kola sa jednosmernim strujama otpornost otpornika je Omovim zakonom definisana kao količnik napona na otporniku i struje kroz otpornik. U slučaju kola sa naizmeničnim

strujama, kada se koristi fazorska predstava, naponi i struje postaju kompleksne veličine. Ako se formira količnik fazora napona na nekom elementu i fazora struje kroz isti element:

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} \quad (5.30)$$

dobija se *uopšteni (generalizovani) Ohmov zakon*. Kompleksna veličina \mathbf{Z} , koja predstavlja analogiju otpornosti kod jednosmernog režima, naziva se *impedansa*. Jedinica za impedansu je Om (Ω).



Slika 5.2: Fazorski dijagrami za napon i struju kod pasivnih elemenata.

U polarnom koordinatnom sistemu, impedansa se može predstaviti preko svog modula i argumenta kao:

$$\mathbf{Z} = \frac{V_M \angle \theta_v}{I_M \angle \theta_i} = \frac{V_M}{I_M} \angle (\theta_v - \theta_i) = Z \angle \theta_z \quad (5.31)$$

dok se u pravouglom koordinatnom sistemu može predstaviti preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$\mathbf{Z}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (5.32)$$

Realni deo impedanse $R(\omega)$ se naziva rezistivna komponenta ili *rezistansa*, dok se imaginarni deo impedanse $X(\omega)$ naziva reaktivna komponenta ili *reaktansa*. Primetimo da *impedansa nije fazor*, iako je frekvencijski zavisna kompleksna veličina. Uslov da neka kompleksna veličina predstavlja fazor je da u vremenskom domenu odgovara nekom sinusoidalnom signalu. Dakle, *pojam impedanse nema nikakvo značenje u vremenskom domenu*.

Poređenjem dve prethodne jednačine (5.31) i (5.32) lako je utvrditi veze između dva oblika predstavljanja impedanse. Tako je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \theta_z = \arctg \frac{X}{R} \quad (5.33)$$

odnosno,

$$R = Z \cos \theta_z, \quad X = Z \sin \theta_z \quad (5.34)$$

Kod analize kola sa jednosmernim strujama pokazalo se pogodno da se uvede veličina recipročna otpornosti, koja je nazvana provodnost. Odgovarajuća definicija se može dati i kod kola sa naizmeničnim strujama. Dakle, recipročna vrednost impedanse, koja predstavlja količnik fazora struje i napona:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} \quad (5.35)$$

naziva se *admitansa*. Jedinica za admitansu je Simens (S).

Pošto je impedansa kompleksna veličina, admitansa je takođe kompleksna veličina. Ona se takođe može predstaviti preko svog modula i argumenta kao:

$$\mathbf{Y} = \frac{I_M \angle \theta_i}{V_M \angle \theta_v} = \frac{I_M}{V_M} \angle (\theta_i - \theta_v) = Y \angle \theta_y \quad (5.36)$$

ili preko svog realnog i imaginarnog dela:

$$\mathbf{Y}(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \quad (5.37)$$

Realni deo admitanse $G(\omega)$ se naziva *konduktansa*, dok se imaginarni deo admitanse naziva *susceptansa*.

Na osnovu prethodnih jednačina lako je uspostaviti veze između komponenata impedanse i reaktanse. Polazeći od jednačine:

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \quad (5.38)$$

lako se dobija:

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2} \quad (5.39)$$

Na sličan način se dobijaju dualne relacije:

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2}, \quad X = \frac{-B}{G^2 + B^2} \quad (5.40)$$

Interesantno je primetiti da rezistansa i konduktansa nisu recipročne veličine, i da takođe reaktansa i susceptansa nisu recipročne veličine.

Na kraju, prikažimo tabelarno impedanse i admitanse tri osnovna električna elementa, otpornika, kalema i kondenzatora, koje ćemo često koristiti u proučavanju električnih kola:

Element	Impedansa (\mathbf{Z})	Admitansa (\mathbf{Y})
Otpornik (R)	$\mathbf{Z}_R = R$	$\mathbf{Y}_R = G = 1/R$
Kalem (L)	$\mathbf{Z}_L = j\omega L$	$\mathbf{Y}_L = 1/j\omega L = -j/\omega L$
Kondenzator (C)	$\mathbf{Z}_C = 1/j\omega C = -j/\omega C$	$\mathbf{Y}_C = j\omega C$

5.5 Snaga naizmjenične struje

Neka su sinusoidalni napon i struja na nekom elementu kola $V_M \cos(\omega t + \theta_v)$ i $I_M \cos(\omega t + \theta_i)$ u vremenskom domenu, odnosno, neka su njihovi fazori $\mathbf{V} = V_M e^{j\theta_v} = V_M \angle \theta_v$ i $\mathbf{I} = I_M e^{j\theta_i} = I_M \angle \theta_i$ u frekvencijskom domenu. Snaga periodičnog signala je po definiciji srednja vrednost proizvoda napona i struje u okviru jedne periode. Dakle:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T V_M \cos(\omega t + \theta_v) I_M \cos(\omega t + \theta_i) dt \\ &= \frac{V_M I_M}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i)] dt \\ &= \frac{V_M I_M}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) = \frac{V_M I_M}{2} \cos \phi \end{aligned} \quad (5.41)$$

gde je $\phi = \theta_v - \theta_i$ fazna razlika između napona na elementu i struje kroz element.

Posebno je interesantan slučaj snage na otporniku. Tada su napon i struja u fazi, pa je $\phi = \theta_v - \theta_i = 0$. Snaga na otporniku je onda data jednostavnim izrazom:

$$P = \frac{V_M I_M}{2} \quad (5.42)$$

odnosno jednaka je polovini proizvoda amplituda struje i napona. S obzirom da je kod otpornika $\mathbf{V} = R\mathbf{I}$, izraz (5.42) se može napisati i kao:

$$P = \frac{RI_M^2}{2} = \frac{V_M^2}{2R} \quad (5.43)$$

Zamislamo sada da kroz isti otpornik teče neka jednosmerna struja I i da je tada napon na njemu V koji na otporniku razvijaju istu snagu kao u slučaju sinusoidalne pobude. Takva vrednost struje naziva *efektivna vrednost struje*, a napona *efektivna vrednost napona*. Pošto je u jednosmernom režimu $V_{ef} = RI_{ef}$, onda je:

$$P = V_{ef} I_{ef} = RI_{ef}^2 = \frac{V_{ef}^2}{R} \quad (5.44)$$

Izjednačavanjem snaga iz izraza (5.43) i (5.44) se dobija:

$$V_{ef} = \frac{V_M}{\sqrt{2}}, \quad I_{ef} = \frac{I_M}{\sqrt{2}} \quad (5.45)$$

odnosno, efektivna vrednost napona na otporniku ili struje kroz otpornik dobija se deljenjem amplitude napona ili struje sa kvadratnim korenom iz 2.

5.6 Kirhofovi zakoni u kolima sa naizmeničnim strujama

U prethodnim izlaganjima već je rečeno da za kola s stalnim jednosmernim strujama kao i za kola sa promenljivim strujama važi prvi Kirhofov zakon koji kaže da je suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka nuli.

$$\sum_{j=1}^N i_j(t) = 0 \quad (5.46)$$

gde je $i_j(t)$ struja j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. U slučaju sinusoidalne pobude, struje u kolu su takođe sinusoidalne i imaju istu učestanost. Dakle, prethodna jednačina dobija oblik:

$$\sum_{j=1}^N I_{M_j} \cos(\omega t + \phi_j) = 0 \quad (5.47)$$

odakle se transformacijom sinusoidalnih veličina u fazore dobija prvi Kirhofov zakon za kola sa naizmeničnim strujama u fazorskom obliku:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{I}_j = 0 \quad (5.48)$$

gde je \mathbf{I}_j fazor struje j -te grane koja ulazi u čvor, dok je N broj grana koje ulaze u čvor. Dakle, u frekvencijskom (fazorskom) domenu prvi Kirhofov zakon glasi: *Suma fazora struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli.*

Na isti način se polazeći od jednačine po drugom Kirhofovom zakonu u vremenskom domenu:

$$\sum_{j=1}^N v_j(t) = 0 \quad (5.49)$$

transformacijom sinusoidalnih veličina u vremenskom domenu u fazore, dobija drugi Kirhofov zakon za kola sa naizmjeničnim strujama u fazorskom obliku:

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{V}_j = 0 \quad (5.50)$$

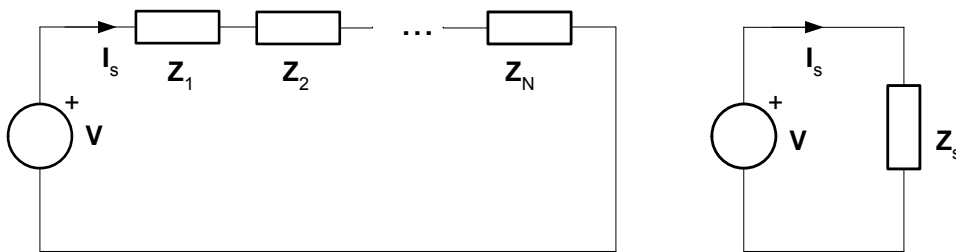
gde je \mathbf{V}_j fazor napona na j -toj grani petlje koja ukupno ima N grana. Dakle, u frekvencijskom (fazorskom) domenu drugi Kirhofov zakon glasi: *Suma fazora napona u bilo kojoj petlji kola jednaka je nuli.*

5.7 Osnovne transformacije u kolima sa naizmjeničnim strujama

Primenom prvog i drugog Kirhofovog zakona neka kola se mogu uprostiti, što smanjuje broj jednačina kojima se ona opisuju i olakšava njihovo rešavanje. U narednom izlaganju biće ukratko opisane neke takve transformacije:

5.7.1 Serijska (redna) veza impedansi

Ako se N impedansi tako poveže tako da se u svakom čvoru stiču samo po dve impedanse (osim kod prvog i poslednjeg čvora), takva veza se naziva *serijska* ili *redna veza* impedansi i prikazana je na slici 5.3a.



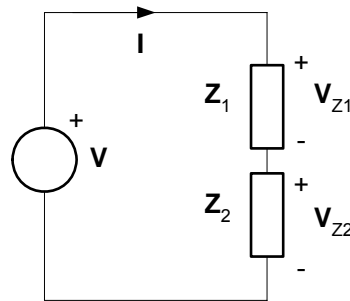
Slika 5.3: Serijska (redna) veza impedansi.

Primenom drugog Kirhofovog zakona dobija se ekvivalentna impedansa kojom se može zameniti serijska veza impedansi:

$$\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_N \quad (5.51)$$

odnosno, *ekvivalentna impedansa serijski vezanih impedansi jednaka je zbiru pojedinačnih impedansi.*

5.4. Posmatrajmo dve serijski vezane impedanse koje formiraju razdelnik napona, kao na slici



Slika 5.4: Delitelj (razdelnik) napona.

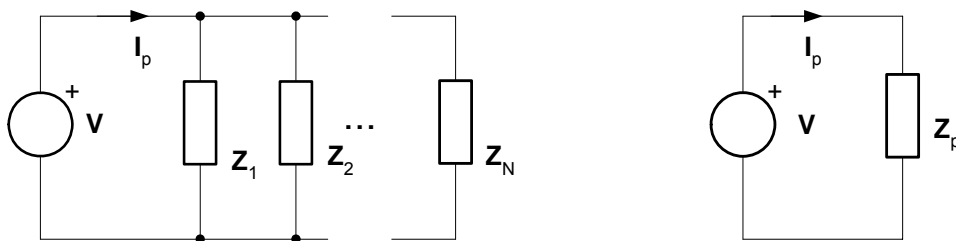
Pošto kroz oba impedanse protiče ista struja, naponi na impedansama su:

$$V_{Z_1} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} V, \quad V_{Z_2} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} V \quad (5.52)$$

odnosno, napon izvora V deli se između impedansi Z_1 i Z_2 u direktnoj srazmeri sa njihovim vrednostima.

5.7.2 Paralelna veza impedansi

Ako se N impedansi tako poveže da sve imaju zajedničke priključke, takva veza se naziva *paralelna veza* impedansi i prikazana je na slici 5.5a.



Slika 5.5: Paralelna veza impedansi.

Primenom prvog Kirhofovog zakona dobija se ekvivalentna impedansa (admitansa) kojom se može zameniti paralelna veza impedansi:

$$Y_p = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N \quad (5.53)$$

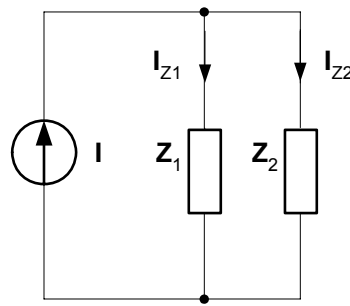
odnosno, ekvivalentna admitansa paralelno vezanih admitansi jednaka je zbiru pojedinačnih admitansi. Alternativni oblik prethodne jednačine je:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N} \quad (5.54)$$

Posmatrajmo sada dve paralelno vezane impedanse koje formiraju razdelnik struje, kao na slici 5.6. Pošto je napon na obe impedanse isti, struje kroz paralelno vezane impedanse su:

$$I_{Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} I, \quad I_{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} I \quad (5.55)$$

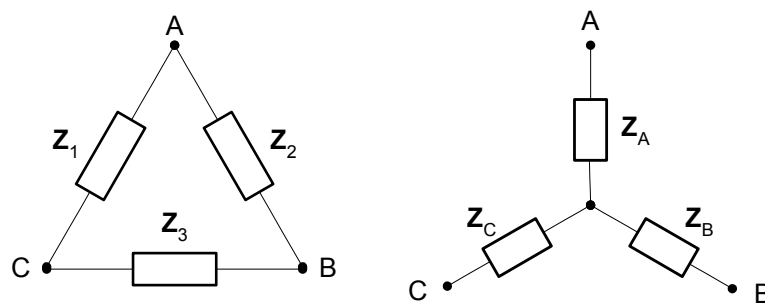
odnosno, *struja izvora I deli se između impedansi Z_1 i Z_2 u obrnutoj srazmeri sa njihovim vrednostima.*



Slika 5.6: Delitelj (razdelnik) struje.

5.7.3 Transformacije trougao – zvezda i zvezda - trougao

Transformacije trougla u zvezdu i zvezde u trougao mogu se primeniti i na impedanse i prikazane su na slici 5.7.



Slika 5.7: Vezivanje impedansi u trougao (Δ) i zvezdu (Y).

Da bi ova dva kola bila ekvivalentna, impedansa između ma koje dve tačke u oba kola, kada se treća tačka ostavi nepovezana, mora biti ista. Korišćenjem pravila za paralelno i serijsko vezivanje otpornika, sa slike 5.7 se dobijaju relacije ekvivalencije:

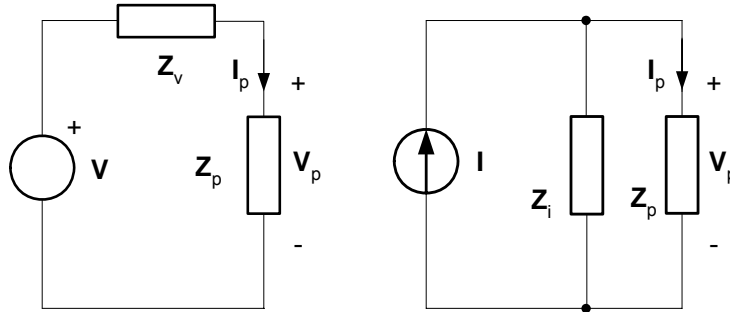
$$\begin{aligned} Z_A &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_B &= \frac{Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \\ Z_C &= \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \end{aligned} \quad (5.56)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_B} \\ Z_2 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_C} \\ Z_3 &= \frac{Z_A Z_B + Z_A Z_C + Z_B Z_C}{Z_A} \end{aligned} \quad (5.57)$$

5.7.4 Transformacije izvora u kolima sa naizmeničnim strujama

Posmatrajmo kola prikazana na slici 5.8, gde su prikazani realni naponski izvor, koji ima konačnu unutrašnju impedansu Z_v , i realni strujni izvor, koji ima konačnu unutrašnju admitansu $Y_i = 1/Z_i$.



Slika 3.8: Realni naponski i strujni izvor.

Do uslova ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora se lako može doći posmatranjem slike 5.8. Ako se na realni strujni ili naponski izvor priključi ista impedansa Z_p , onda u slučaju ekvivalentnih izvora struja kroz impedansu Z_p mora biti isti u oba kola. Po Omovom zakonu, onda je isti i napon V_p . Dakle, iz uslova jednakosti struja kroz Z_p :

$$I_p = \frac{1}{Z_v + Z_p} V = \frac{Z_i}{Z_i + Z_p} I \quad (5.58)$$

direktno se dobijaju uslovi ekvivalencije realnog naponskog i strujnog izvora:

$$V = Z_i I, \quad Z_v = Z_i \quad (5.59)$$

Dakle, ako u kolu imamo strujni izvor struje I i njemu paralelno vezanu impedansu Z , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim naponskim izvorom napona $V = RI$ i serijski vezanom impedansom Z . Takođe važi i obrnuto: ako u kolu imamo naponski izvor napona V sa serijski vezanom impedansom Z , onda se ova kombinacija može zameniti ekvivalentnim strujnim izvorom struje $I = V/Z$ i njemu paralelno vezanom impedansom Z . Ostali parametri kola u kome se nalaze nezavisni izvori ostaju nepromenjeni.

5.8 Sistem jednačina napona čvorova za kola sa naizmeničnim strujama

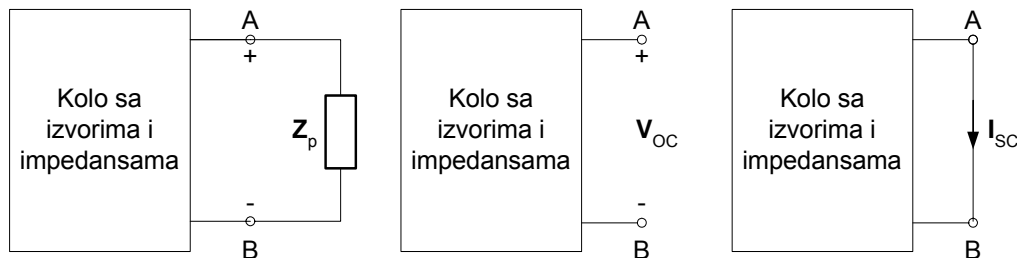
Kao i kod analize jednosmernog režima, i kod kola sa naizmeničnim strujama može se primeniti *sistem jednačina napona čvorova* za rešavanje kola. U slučaju kola sa N čvorova, broj linearnih jednačina u sistemu je $N-1$. U slučaju kola sa N čvorova, broj nepoznatih veličina (napona) u sistemu $N-1$, tj. isti je kao broj jednačina. Sistem jednačina napona čvorova predstavlja *sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima* i izgleda ovako:

$$\begin{aligned} Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + \dots + Y_{1N-1}V_{N-1} &= I_1 \\ Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + \dots + Y_{2N-1}V_{N-1} &= I_2 \\ &\vdots \\ Y_{N-11}V_1 + Y_{N-12}V_2 + \dots + Y_{N-1N-1}V_{N-1} &= I_{N-1} \end{aligned} \quad (5.60)$$

Elementi matrice sistema van glavne dijagonale, Y_{mn} gde je $m \neq n$, predstavljaju zbir admitansi svih grana između čvorova m i n i uvek imaju negativni predznak. Dijagonalni elementi, Y_{kk} , predstavljaju zbir provodnosti svih grana koje se stiču u čvoru k i uvek imaju pozitivni predznak. Struje sa desne strane jednačina, I_k , predstavljaju struje izvora koje utiču u odgovarajući čvor k . Ovaj sistem jednačina se može i direktno napisati samo na osnovu posmatranja kola.

5.9 Tevenenova i Nortonova teorema za kola sa naizmeničnim strujama

Pretpostavimo da imamo neko električno kolo sa naizmeničnom pobudom i da želimo da odredimo struju, napon ili snagu na nekoj impedansi, koji ćemo nazvati *potrošač* i obeležiti sa Z_p . Ovaj slučaj je ilustrovan na slici 5.9a. Tevenenova i Nortonova teorema pokazuju kako se celo kolo, osim potrošača, može zameniti ekvivalentnim realnim naponskim ili strujnim izvorom, tako da struja i napon potrošača ostanu nepromenjeni.

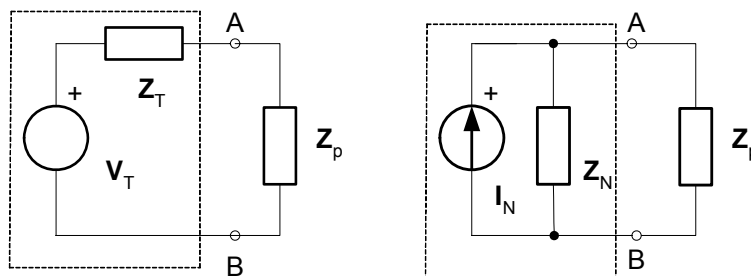


Slika 5.9: Određivanje napona otvorenih krajeva i struje kratkog spoja.

Posmatrajmo kolo na sl. 5.9a. Ako se potrošač isključi iz kola, pristupni krajevi ostaju otvoreni i na njima postoji napon koji ćemo nazvati napon otvorene veze i obeležiti sa V_{OC} , kao na slici 5.9b. Međutim, ako se posle isključenja potrošača pristupni krajevi kratko spoje, onda između njih postoji struja kratkog spoja, koju ćemo obeležiti sa I_{SC} , kao na slici 5.9c.

Za izvođenje *Tevenenove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 5.10a, u kome je kompletno kolo sa izvorima i impedansama (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim naponskim izvorom V_T i serijski vezanim impedansom Z_T . Poređenjem kola sa slike 5.9 i slike 5.10a, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_{OC}, \quad \mathbf{Z}_T = \frac{\mathbf{V}_{OC}}{\mathbf{I}_{SC}} \quad (5.61)$$



Slika 5.10: Tevenenova i Nortonova teorema.

Ove relacije predstavljaju Tevenenovu teoremu koja glasi:

Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i impedansama se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog naponskog izvora \mathbf{V}_T , čiji je napon jednak naponu kola sa isključenim potrošačem \mathbf{V}_{OC} , i serijske impedanse \mathbf{Z}_T , čija je impedansa jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem \mathbf{V}_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač \mathbf{I}_{SC} .

Za izvođenje *Nortonove teoreme* posmatrajmo kolo na sl. 5.10b, u kome je kompletno kolo sa izvorima i impedansama (bez potrošača) zamenjeno ekvivalentnim strujnim izvorom \mathbf{I}_N i paralelno vezanom impedansom \mathbf{Z}_N . Poređenjem kola sa slike 5.9 i slike 5.10b, lako se vidi da su struja kroz potrošač i napon na potrošaču isti ako je:

$$\mathbf{I}_N = \mathbf{I}_{SC}, \quad \mathbf{Z}_N = \frac{\mathbf{V}_{OC}}{\mathbf{I}_{SC}} \quad (5.62)$$

Ove relacije predstavljaju Nortonovu teoremu koja glasi:

Svako električno kolo sa zavisnim i nezavisnim izvorima i impedansama se može zameniti ekvivalentnim kolom koje se sastoji od idealnog strujnog izvora \mathbf{I}_N , čija je struja jednaka struji kroz kratkospojeni potrošač \mathbf{I}_{SC} , i paralelne impedanse \mathbf{Z}_N , čija je impedansa jednaka količniku napona kola sa isključenim potrošačem \mathbf{V}_{OC} i struje kroz kratkospojeni potrošač \mathbf{I}_{SC} .

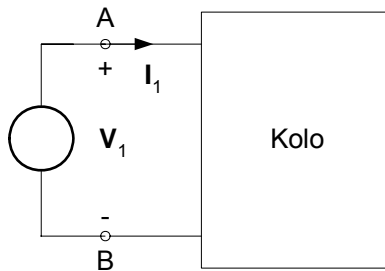
5.10 Kola sa jednim i dva pristupa

Posmatrajmo kolo na slici 5.11 kod koga je između čvorova A i B priključen pobudni izvor koji može biti strujni ili naponski. U oba slučaja napon na pristupu obeležimo sa \mathbf{V}_1 a struju koja utiče u kolo sa \mathbf{I}_1 . Ovakvo kolo se naziva *kolo sa jednim pristupom*.

Ako je pobudni izvor strujni generator, onda *ulazni napon predstavlja odziv kola na primenjenu pobudu*. Količnik fazora odziva i pobude:

$$\mathbf{Z}_u = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \quad (5.63)$$

naziva se *ulazna impedansa* kola.



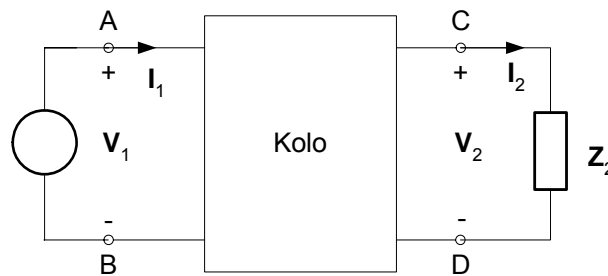
Slika 5.11: Kolo sa jednim pristupom.

Ako je pobudni izvor naponski generator, onda *ulazna struja predstavlja odziv kola na primenjenu pobudu*. Količnik fazora odziva i pobude:

$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \quad (5.64)$$

naziva se *ulazna admitansa* kola.

Posmatrajmo sada kolo na slici 5.12 kod koga je između čvorova A i B priključen pobudni izvor, koji može biti strujni ili naponski, a između čvorova C i D potrošač, čija je impedansa \mathbf{Z}_p . Ovakvo kolo se naziva *kolo sa dva pristupa*. Napon i struju na prvom pristupu obeležimo sa \mathbf{V}_1 i \mathbf{I}_1 , a napon i struju na drugom pristupu sa \mathbf{V}_2 i \mathbf{I}_2 .



Slika 5.12: Kolo sa dva pristupa.

Ako je pobudni izvor strujni generator, onda se za kolo na slici 5.12 mogu definisati tri odnosa:

$$\mathbf{Z}_u = \frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_1} \quad (5.65)$$

koji se naziva se *ulazna impedansa* kola,

$$\mathbf{Z}_{12} = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{I}_1} \quad (5.66)$$

koji se naziva *prenosna impedansa (transimpedansa)* kola, i,

$$\mathbf{A}_i = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{I}_1} \quad (5.67)$$

koji se naziva *strujno pojačanje* kola.

Ako je pobudni izvor naponski generator, onda se za kolo na slici 5.12 mogu definisati još tri odnosa:

$$\mathbf{Y}_u = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{V}_1} \quad (5.68)$$

koji se naziva se *ulazna admitansa* kola,

$$\mathbf{Y}_{12} = \frac{\mathbf{I}_2}{\mathbf{V}_1} \quad (5.69)$$

koji se naziva *prenosna admitansa (transadmitansa)* kola, i,

$$\mathbf{A}_v = \frac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{V}_1} \quad (5.70)$$

koji se naziva *naponsko pojačanje* kola.

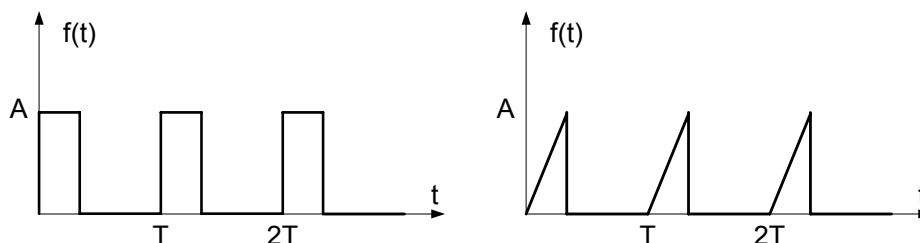
5.11 Analiza kola sa složenoperiodičnim strujama

U dosadašnjim razmatranjima uvek smo pretpostavljali da je napon ili struja pobudnog generatora sinusoidalni signal fiksne učestanosti, tzv. *prostoperiodični signal*. Međutim, u praksi se često sreću i signali koji nisu sinusoidalni, ali su periodični, ili čak nisu ni periodični.

Posmatrajmo neki periodični signal, koji za svako t zadovoljava relaciju:

$$f(t) = f(t + nT), \quad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (5.71)$$

gde je T perioda signala. Primeri ovakvih signala su povorke pravougaonih ili trougaonih signala, koje se često sreću u elektronskim sistemima, a koje su prikazane na slici 5.13.



Slika 5.13: Nesinusoidalni periodični signali.

U matematičkoj teoriji Furijeovih redova pokazuje se da se svaka periodična funkcija $f(t)$ može predstaviti pomoću zbira sinusoidalnih funkcija, koje su linearno nezavisne. Dakle, imamo:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \quad (5.72)$$

gde je $\omega_0 = 2\pi/T$ osnovna učestanost signala, a a_0 predstavlja srednju vrednost signala.

Posmatrajmo malo detaljnije poslednji izraz. Perioda sinusoidalne komponente za $n=1$ je T , perioda sinusoidalne komponente za $n=2$ je $T/2$, perioda sinusoidalne komponente za $n=3$ je $T/3$, itd. U opštem slučaju, perioda sinusoidalne komponente za $n=k$ je T/k . Takva komponenta se naziva k -ta harmonijska komponenta ili kraće k -ti harmonik. Jednačina k -tog harmonika je $a_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$, a fazor koji ga predstavlja je $a_k \angle \theta_k$.

Pošto se $\cos(n\omega_0 t + \theta_n)$ može po Ojlerovoj formuli predstaviti u eksponencijalnom obliku, prethodni razvoj funkcije $f(t)$ se može napisati i u ekvivalentnom obliku:

$$f(t) = a_0 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} a_n e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad (5.73)$$

gde se kompleksne konstante \mathbf{c}_n nazivaju Furijeovi koeficijenti. Ovi koeficijenti se mogu odrediti na jednostavan način. Ako se jednačina (5.73) pomnoži sa $e^{-jk\omega_0 t}$ i odredi integral obe strane jednačine u okviru jedne periode, dobija se:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-jk\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{c}_n \int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt \quad (5.74)$$

Pošto je:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} e^{j(n-k)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ T & n = k \end{cases} \quad (5.75)$$

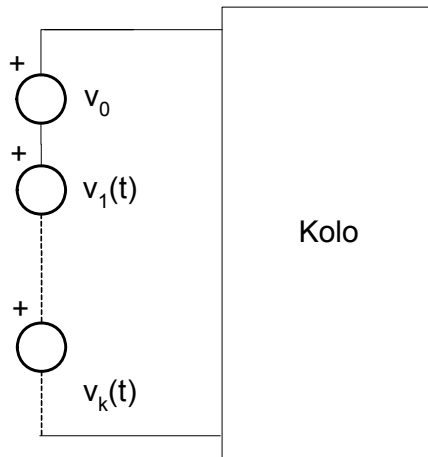
konačno se dobija:

$$\mathbf{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5.76)$$

Neka se sada takav periodični signal primeni kao pobuda nekog linearnog električnog kola. Ako je recimo pobudni signal napon, onda se, primenom razvoja u Furijeov red, pobudni signal može predstaviti u vidu zbira napona:

$$v(t) = v_0 + v_1(t) + v_2(t) + \dots \quad (5.77)$$

što se može ilustrovati slikom 5.14.



Slika 5.14: Kolo sa složenoperiodičnom pobudom.

U kolu na slici 5.14 svaki naponski generator ima svoju amplitudu i učestanost. Primenom fazorske analize može se odrediti odziv kola na svaku komponentu pobudnog signala u frekvencijskom domenu i prevesti u vremenski domen. Dalje, pošto je kolo linearno, može se primeniti princip superpozicije i ukupni odziv kola dobiti sumiranjem doprinosa svih komponenata pobudnog signala. Na taj način se dobija *ukupni odziv kola u ustaljenom složenoperiodičnom režimu*.

Equation Section 6

6. Osnovi fizike poluprovodnika

Kao što je već rečeno, prema svojoj provodnosti elektrotehnički materijali se dele na tri grupe: provodnike, poluprovodnike i izolatore. Poluprovodnički materijali predstavljaju osnov savremene elektronike, tako da ćemo u narednim izlaganjima ukratko razmotriti njihove najvažnije osobine, koje će nam pomoći da razumemo rad osnovnih poluprovodničkih komponenata: diode, bipolarnog tranzistora i MOS tranzistora. Najvažniji poluprovodnički materijali su silicijum (Si), germanijum (Ge) i galijum arsenid (GaAs).

6.1 Osnovni pojmovi o provodnosti materijala

Svaki električni provodnik možemo posmatrati na dva načina:

- Posmatrajući makroskopske efekte preko napona, struje, otpornosti, itd.
- Posmatrajući mikroskopske efekte preko električnog polja, gustine struje, itd.

Za prvi pristup može se koristiti Omov zakon:

$$V = RI \quad (6.1)$$

dok je za drugi pristup bolje iskoristiti relaciju između električnog polja i napona

$$E = \frac{V}{l} \quad (6.2)$$

gde je V napon na krajevima provodnika a l njegova dužina, kao i definiciju gustine struje:

$$J = \frac{I}{S} \quad (6.3)$$

gde je I struja kroz provodnik a S poprečni presek provodnika.

Zamenom u jednačinu za Omov zakon se dobija:

$$El = RJS \quad (6.4)$$

odnosno:

$$E = \frac{RJS}{l} = \rho J \quad (6.5)$$

tako da se konačno dobija:

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (6.6)$$

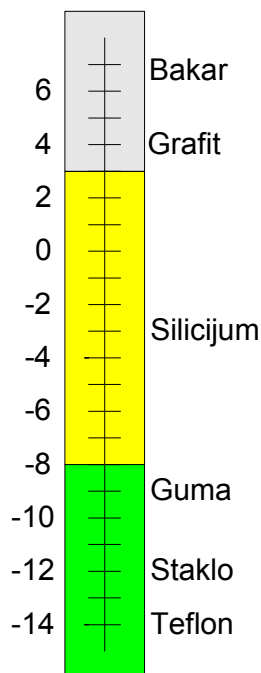
Konstanta ρ se naziva *specifična otpornost*. Njena jedinica je Ωm . Recipročna vrednost specifične otpornosti je *specifična provodnost*:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \quad (6.7)$$

čija je jedinica S/m. Koristeći specifičnu provodnost, relacija između električnog polja i gustine struje se može napisati kao:

$$J = \sigma E \quad (6.8)$$

Specifična otpornost (provodnost) je karakteristika materijala. Dobri provodnici imaju malu specifičnu otpornost. Slika 6.1 prikazuje specifičnu provodnost raznih elektrotehničkih materijala u logaritamskoj razmeri:



Slika 6.1: Specifična provodnost nekih elektrotehničkih materijala.

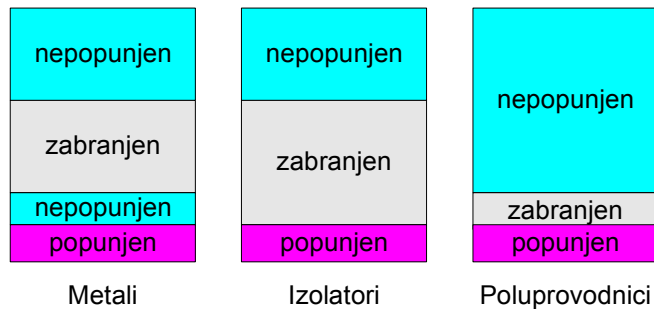
6.2 Elektronska struktura materijala

Provodnost materijala je direktno povezana sa elektronskom strukturom materijala. Kao što je poznato iz fizike, elektroni koji kruže oko jezgra atoma mogu imati energije koje odgovaraju diskretnim energetske nivoima.

Metali imaju delimično popunjene energetske nivoe neposredno uz potpuno popunjene nivoe, što omogućava da elektroni lako napuste atom i slobodno se kreću kroz metal. Takvi elektroni se nazivaju *slobodni elektroni*.

Izolatori imaju veliku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetske nivoa, što zahteva da elektroni dobiju veliku energiju da bi preskočili zabranjenu zonu.

Poluprovodnici imaju usku zabranjenu zonu između popunjenih i nepopunjenih energetske nivoa, tako da elektroni koji dobiju malu dodatnu energiju mogu preskočiti zabranjenu zonu i postati pokretni. Pošto energija elektrona zavisi od temperature, i provodnost poluprovodnika zavisi od temperature.



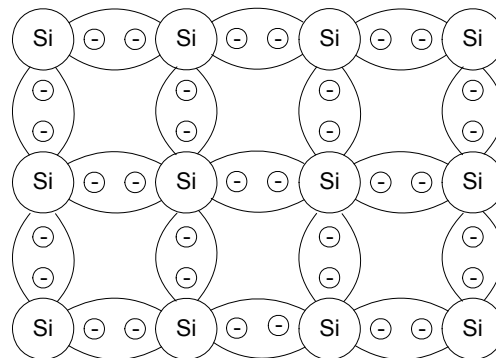
Slika 6.2: Energetski nivoi kod metala, izolatora i poluprovodnika.

6.3 Silicijum kao poluprovodnik

Silicijum je osnovni poluprovodnički materijal. Kristal čistog silicijuma ima pravilnu strukturu u kojoj atomi zadržavaju svoj položaj pomoću *kovalentnih veza* koje formiraju četiri valentna elektrona koji se nalaze u najvišem energetskom opsegu. Na sobnoj temperaturi kovalentne veze su dovoljno čvrste tako da je broj slobodnih elektrona veoma mali. Zbog toga je specifična provodnost čistog kristala silicijuma veoma mala.

Pošto su svi elektroni povezani valentnim vezama sa susednim atomima, silicijum bi trebalo da bude izolator. Međutim, čak i na sobnoj temperaturi, valentne veze su veoma slabe, tako da pojedini elektroni mogu lako da dobiju dovoljnu energiju da ih raskinu i postanu slobodni elektroni. Upraznjeno mesto elektrona u valentnoj vezi naziva se *šupljina*. Takav pozitivno nalektrisan atom može da privuče jedan elektron iz obližnje valentne veze, popuni raskinutu valentnu vezu i ponovo postane neutralan. Dakle, ekvivalentni efekt je kao da se pozitivno nalektrisanje kreće od atoma do atoma. Međutim, pošto je za kretanje šupljina potrebno pokrenuti više elektrona, pokretljivost šupljina je manja od pokretljivosti elektrona.

Pozitivno nalektrisan atom može da privuče i neki slobodni elektron i neutrališe se. Proces spajanja slobodnog elektrona i šupljine se naziva *rekombinacija*.



Slika 6.3: Kristalna rešetka čistog silicijuma.

Dakle, provodnost čistog silicijuma potiče od dva efekta:

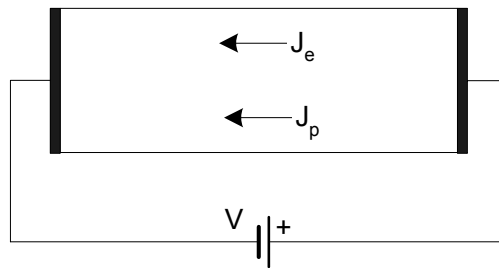
- Kretanja elektrona
- Kretanja šupljina

U čistom kristalu silicijuma broj slobodnih elektrona i broj šupljina moraju biti isti. Koncentracije slobodnih nosilaca u čistom kristalu se nazivaju *sopstvene koncentracije* koje zavise od temperature po formuli:

$$n_i^2 = BT^3 e^{-E_G/kT} \quad (6.9)$$

gde je B konstanta koja zavisi od materijala i za silicijum iznosi $5.4 \cdot 10^{31}$. $E_G = 1.12$ eV je parametar koji se naziva *energetski procep* i predstavlja minimalnu energiju za raskidanje kovalentne veze, dok je $k = 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/°K Boltzmanova konstanta. Sopstvene koncentracije elektrona i šupljina na sobnoj temperaturi $T = 300^\circ\text{K} = 27^\circ\text{C}$ su $n_i = p_i = 1.5 \cdot 10^{16}$ nosilaca/m³ i veoma su male u odnosu na gustinu atoma u kristalu silicijuma $5 \cdot 10^{28}$ atoma/m³. Dakle, kod čistog silicijuma svaki bilioniti atom u kristalu daje jedan par slobodnih nosilaca. Zbog toga je čist silicijum veoma slab provodnik.

Ako se na krajeve silicijumskog kristala priključi napon V kao na slici:



Slika 6.4: Priključenje naponskog izvora na kristal čistog silicijuma.

onda dolazi do usmerenog kretanja slobodnih nosilaca kroz poluprovodnik. Iako se elektroni i šupljine pod dejstvom električnog polja kreću u suprotnim smerovima, pošto su oni nosioci suprotnog naelektrisanja, struje elektrona i šupljina se efektivno sabiraju. Dakle, gustina struje kroz poluprovodnik data je izrazom:

$$J = e(\mu_n n_i + \mu_p p_i)E = \sigma E \quad (6.10)$$

gde je $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C - naelektrisanje elektrona, $\mu_n = 0.135$ m²/Vs je *pokretljivost elektrona*, a $\mu_p = 0.048$ m²/Vs je *pokretljivost šupljina*. Veličine μ_n, μ_p takođe zavise od temperature. Na sobnoj temperaturi je $\sigma = 4.4 \cdot 10^{-4}$ S/m, što predstavlja slabu provodnost.

Još jedna osobina silicijuma koja je veoma korisna u mikroelektronici je da se izlaganjem silicijuma kiseoniku na povišenoj temperaturi na njegovoj površini formira oksid (SiO₂), koji je odličan izolator.

6.4 Dopiranje silicijuma primesama

Ako se u kristal silicijuma unesu primeše drugih materijala, provodnost silicijuma se može povećati. Taj postupak se naziva *dopiranje* silicijuma.

Silicijum ima 4 valentna elektrona u najvišem energetskom opsegu. Ako se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima pet valentnih elektrona (fosfor, arsen ili drugi elementi 5. grupe), pojaviće se višak slobodnih elektrona koji znatno povećava provodnost silicijuma. Takve primeše se nazivaju *donorske primeše* jer daju elektrone, a tako dopirani

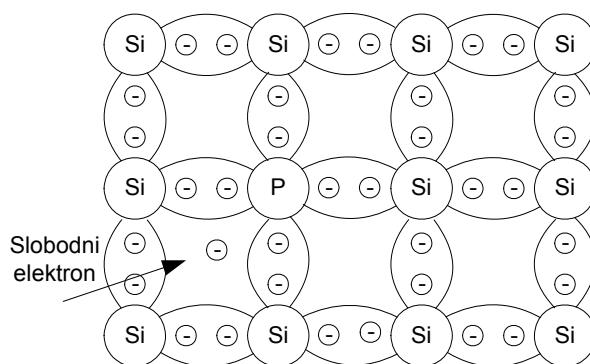
silicijum se naziva *n*-tip silicijuma, jer ima više slobodnih nosilaca negativnog naelektrisanja (elektrona) nego šupljina. Tipična koncentracija primesa je mala i iznosi oko 10^{23} atoma/ m^3 , ali je za 6 do 7 redova veličine veća od sopstvene koncentracije nosilaca. Dakle, broj slobodnih elektrona u *n*-tipu silicijuma je skoro isključivo određen koncentracijom donorskih primesa $n_{n0} = N_D$, gde je N_D koncentracija donorskih primesa.

Broj šupljina u *n*-tipu silicijuma je manji nego kod čistog silicijuma na istoj temperaturi, jer je povećana verovatnoća rekombinacije. Pošto je proizvod sopstvenih koncentracija konstantan na konstantnoj temperaturi, onda iz relacije:

$$n_{n0} p_{n0} = n_i^2 = p_i^2 \quad (6.11)$$

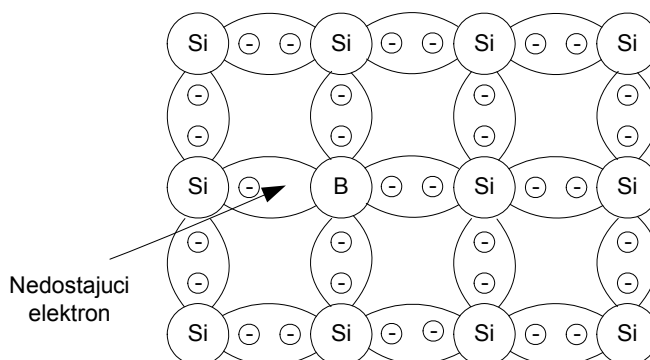
sledi

$$p_{n0} = \frac{n_i^2}{n_{n0}} = \frac{n_i^2}{N_D} \quad (6.12)$$



Slika 6.5: Kristalna rešetka silicijuma sa donorskim primesama.

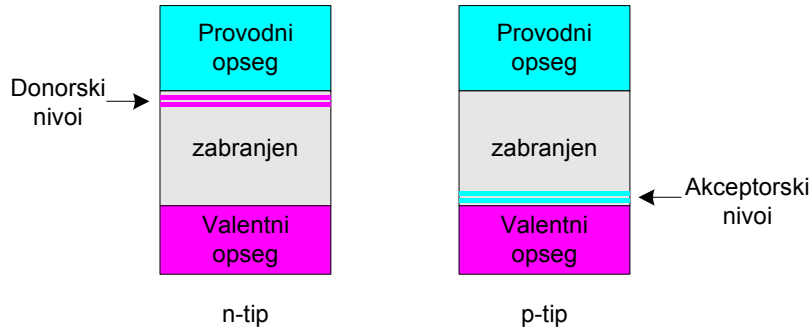
Ako se silicijumu doda mala količina primesa od materijala koji ima tri valentna elektrona (bor, indijum, ili drugi elementi 3. grupe), pojaviće se višak šupljina, koji takođe povećava provodnost silicijuma. Takve prime se nazivaju *akceptorske prime* jer privlače (primaju) slobodne elektrone, a tako dopirani silicijum se naziva *p*-tip silicijuma, jer ima više slobodnih nosilaca pozitivnog naelektrisanja (šupljina) nego elektrona.



Slika 6.6: Kristalna rešetka silicijuma sa akceptorskim primesama.

Primitimo da dodavanje primesa bilo kog tipa ne narušava neutralnost poluprovodnika, iako stvara slobodne nosioce.

Dopiranjem silicijuma menja se i struktura energetskih opsega, tako što se stvaraju novi nivoi unutar zabranjene zone. Donorske primese stvaraju dodatni energetski nivo blizu nepopunjenih provodnih nivoa, čime se olakšava stvaranje slobodnih elektrona. Akceptorske primese stvaraju dodatni energetski nivo blizu popunjenih valentnih nivoa, čime se olakšava stvaranje slobodnih šupljina.



Slika 6.7: Energetski nivoi kod dopiranih poluprovodnika.

S obzirom na veliku razliku koncentracija elektrona i šupljina kod dopiranog silicijuma, provodnost dopiranog silicijuma prvenstveno određuju većinski nosioci:

$$\sigma = \begin{cases} e\mu_n n = e\mu_n N_d & \text{za } n\text{-tip silicijuma} \\ e\mu_p p = e\mu_p N_a & \text{za } p\text{-tip silicijuma} \end{cases} \quad (6.13)$$

Iako je koncentracija primesa veoma mala u odnosu na ukupni broj atoma, ona je ipak znatno veća od koncentracije slobodnih nosilaca kod čistog poluprovodnika. Provodnost je linearna funkcija koncentracije unesenih primesa. Kod materijala n -tipa, većinski (glavni) nosioci su elektroni, a manjinski (sporedni) nosioci su šupljine. Kod materijala p -tipa većinski (glavni) nosioci su šupljine, a manjinski (sporedni) nosioci su elektroni.

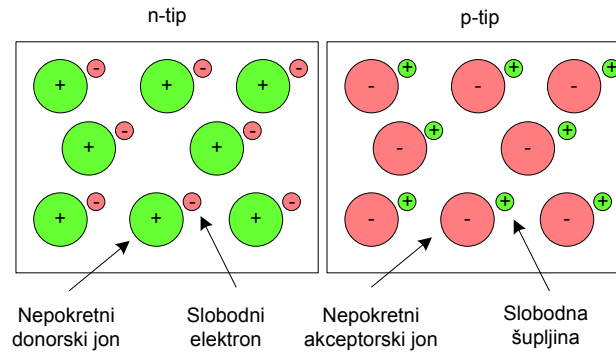
7. pn spoj

Ako se napravi bliski kontakt (spoj) materijala n -tipa i materijala p -tipa dobija se tzv. pn spoj ili *dioda*. U praksi su oba tipa materijala delovi istog kristala silicijuma, čiji su delovi dopirani različitim primesama.

Pored toga što pn spoj predstavlja diodu, on je i osnovni element složenijih elektronskih elemenata, kao što je to bipolarni tranzistor, a ima i značajnu ulogu u radu MOS tranzistora.

7.1 Nepolarisani pn spoj

Na slici 7.1 je ilustrovana situacija kada se p i n tip materijala ne dodiruju. Slobodni elektroni su ravnomerno raspoređeni po telu poluprovodnika n -tipa, dok su slobodne šupljine ravnomerno raspoređene po telu poluprovodnika p -tipa.

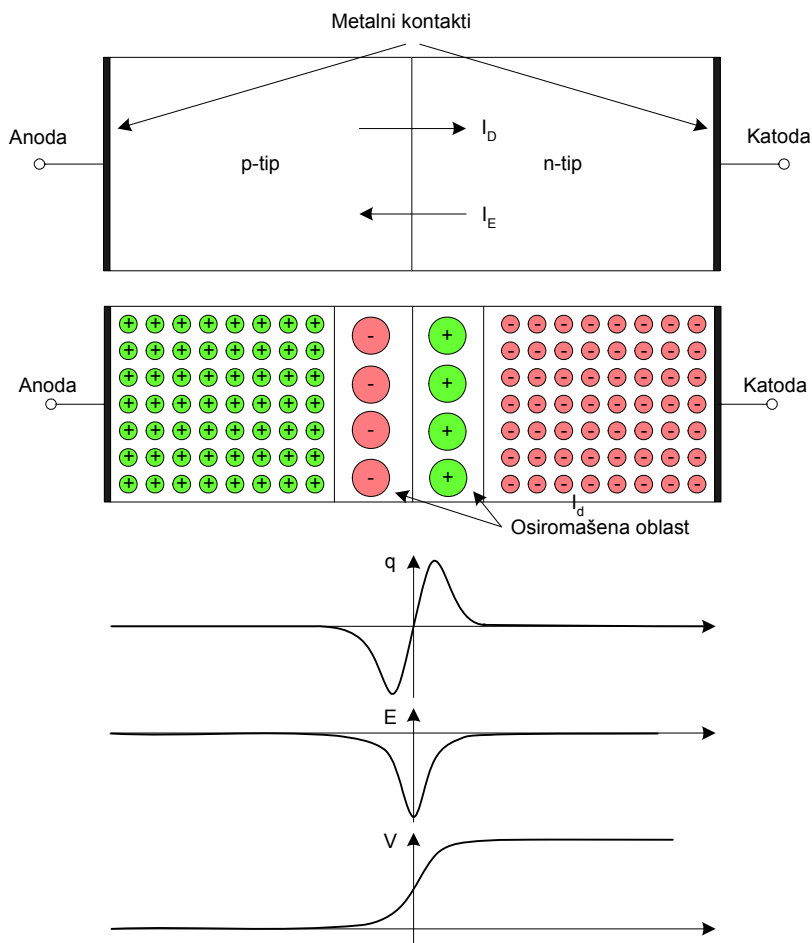


Slika 7.1: Naelektrisanja kod dopiranih poluprovodnika.

Ako se formira kontakt materijala p i n tipa, odnosno pn spoj, onda dolazi do prelaza slobodnih većinskih nosilaca preko spoja u drugu oblast i do njihove rekombinacije. U blizini spoja ostaju samo nepokretni naelektrisani atomi. Ta oblast se naziva *osiromašena oblast* ili *oblast prostornog tovara* jer u njoj nema slobodnih nosilaca elektriciteta.

Nepokretna naelektrisanja formiraju električno polje u oblasti prostornog tovara. To električno polje se suprotstavlja daljem kretanju nosilaca preko spoja. Na spoju se pojavljuje mala razlika napona, koja se naziva *potencijalna barijera*. Veličina potencijalne barijere zavisi od poluprovodničkog materijala i nivoa dopiranja primesama. Kod silicijuma potencijalna barijera je u granicama od 0.6 V do 0.8 V, a kod germanijuma svega 0.2 V. Veličina potencijalne barijere se ne može izmeriti merenjem napona između anode i katode, jer postoje i kontaktni potencijali na spojevima metal-poluprovodnik kod priključaka diode.

Dakle, možemo smatrati da kroz nepolarisani pn spoj protiču četiri različite struje. Difuzione struje većinskih nosilaca, elektrona i šupljina, potiču od različitih koncentracija nosilaca sa obe strane pn spoja i čine difuzionu struju I_D . Usled električnog polja takodje postoje dve komponente struje manjinskih nosilaca, struja elektrona i struja šupljina, koje čine struju usled električnog polja I_S . U ravnotežnom stanju, kada pn spoj nije vezan u električno kolo, ukupna struja kroz pn spoj mora biti jednaka nuli pa su difuzione struje uravnotežene strujama usled električnog polja, tj. $I_D = I_S$. Takvo ravnotežno stanje se naziva *ekvilibrijum*.



Slika 7.2: Raspodela naelektrisanja, električno polje i napon na nepolarisanom pn spoju.

Nepolarisani pn spoj se može u gruboj analogiji predstaviti kondenzatorom. Nepokretni joni predstavljaju opterećenje kondenzatorskih ploča, a osiromašena oblast predstavlja dielektrik. Ako poluprovodnik posmatramo kao celinu, on je i dalje električki neutralan.

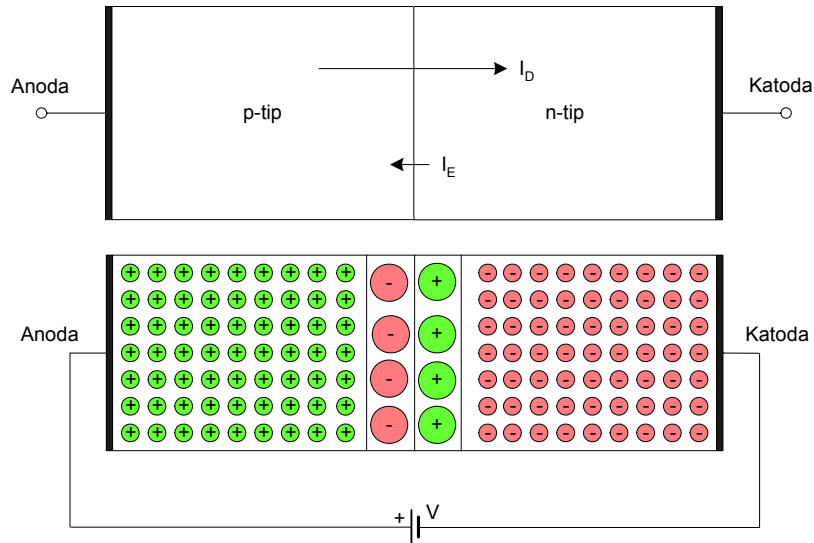
7.2 Direktno polarisani pn spoj

Ako na krajeve pn spoja povežemo naponski izvor sa pozitivnim polom vezanim na p oblast kao na slici 7.3, dolazi do smanjenja potencijalne barijere na spoju, suženja oblasti prostornog tovara i olakšanog kretanja većinskih nosilaca preko spoja. Većinski nosioci iz n oblasti, elektroni, difuzijom prelaze u p oblast, a većinski nosioci iz p oblasti, šupljine, difuzijom prelaze u n oblast, gde dolazi do njihove rekombinacije. Dakle, pošto je električno kolo zatvoreno, postoji stalna difuzija nosilaca preko spoja, odnosno postoji struja kroz pn spoj. Manjinski nosioci takođe prelaze preko spoja usled električnog polja, ali je zbog njihovog znatno manjeg broja njihov doprinos ukupnoj struji zanemarljiv.

Dakle, struja kroz direktno polarisanu diodu se sastoji od dve komponente: struje većinskih nosilaca (difuziona struja) i struje manjinskih nosilaca (struja usled električnog polja).

$$I = I_D - I_E = Ke^{-e(V_0 - V)/kT} - Ke^{-eV_0/kT} = I_S(e^{eV/kT} - 1) = I_S(e^{V/V_T} - 1) \approx I_S e^{V/V_T} \quad (7.1)$$

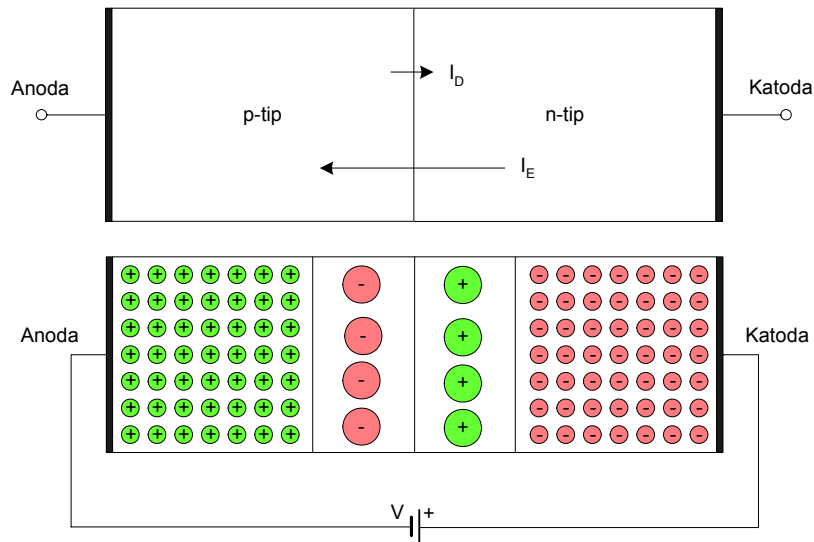
gde je K konstanta koja zavisi od geometrijskih dimenzija pn spoja, V napon na spoju, V_0 napon potencijalne barijere, k Bolcmanova konstanta, a T apsolutna temperatura u $^{\circ}\text{K}$. Struja I_S se naziva *struja zasićenja* pn spoja i direktno je proporcionalna površini pn spoja. Kod silicijuma ona iznosi oko 10^{-15} A, dok je kod germanijuma oko 10^{-6} A na sobnoj temperaturi. Napon $V_T = kT/e$ se naziva *temperaturni napon* i na sobnoj temperaturi iznosi približno 25 mV.



Slika 7.3: Struje i raspodela naelektrisanja na direktno polarisanom pn spoju.

7.3 Inverzno polarisani pn spoj

Ako na pn spoj povežemo naponski izvor sa pozitivnim polom vezanim na n oblast, kao na slici 7.4, dolazi do povećanja potencijalne barijere na spoju, proširenja oblasti prostornog tovara i otežanog kretanja većinskih nosilaca preko spoja. Struja manjinskih nosilaca ostaje skoro nepromenjena i ona predstavlja struju kroz spoj.



Slika 7.4: Struje i raspodela naelektrisanja na inverzno polarisanom pn spoju.

$$I = I_D - I_E \approx -I_S \quad (7.2)$$

Iako teorijski model pokazuje da je struja inverzno polarisanog *pn* spoja jednaka struji zasićenja, eksperimentalno se dobijaju veće vrednosti za struju inverzno polarisanog spoja. Razlog za to su površinski efekti koji izazivaju tzv. *struju curenja*, koja može biti i milion puta veća od struje zasićenja.

7.4 Proboj *pn* spoja i Zener dioda

Ako se na spoj primeni veliki inverzni napon, dolazi do formiranja jakog električnog polja u oblasti prostornog tovara i do naglog porasta struje inverzno polarisanog spoja. Ta pojava se naziva *proboj*, a napon pri kome dolazi do proboja se naziva *napon proboja*.

Postoje dve vrste mehanizma proboja. Ako je napon proboja ispod 5 V, takav proboj se naziva *Zenerov proboj*, a ako je veći od 7 V, onda je u pitanju *lavinski proboj*. Ako je napon proboja između 5 V i 7 V, onda su zastupljena oba mehanizma proboja.

Veličina napona proboja uglavnom zavisi od koncentracije primesa.

Zenerov proboj ima značajnu praktičnu primenu. Zbog vrlo nagle promene struje, napon na Zener diodi u oblasti proboja je praktično konstantan. Zener diode se koriste u stabilizatorima napona i naponskim referentnim izvorima.

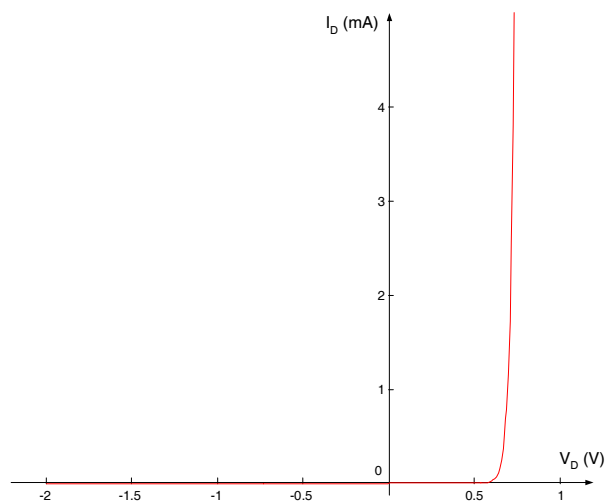
7.5 Modeli diode

7.5.1 Karakteristika diode

Kao što je objašnjeno u prethodnom izlaganju, struja diode pri direktnoj ili inverznoj polarizaciji se može opisati relacijom

$$I = I_S (e^{V/V_T} - 1) \quad (7.3)$$

koja se naziva strujno-naponska karakteristika diode i grafički je predstavljena na slici 7.5.

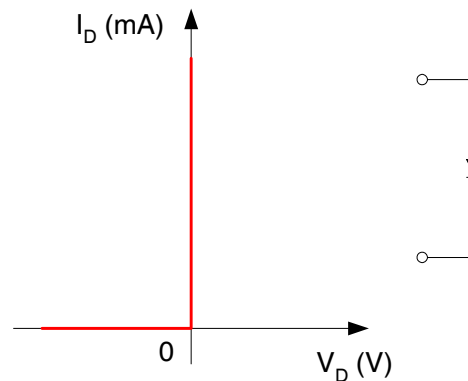


Slika 7.5: Grafički prikaz jednačine diode.

Ova relacija je nelinearna i često se zahteva da bude uprošćena, odnosno linearizovana. U praksi je razvijeno nekoliko uprošćenih modela diode, pogodnih za izračunavanja bez upotrebe računara.

7.5.2 Idealna dioda

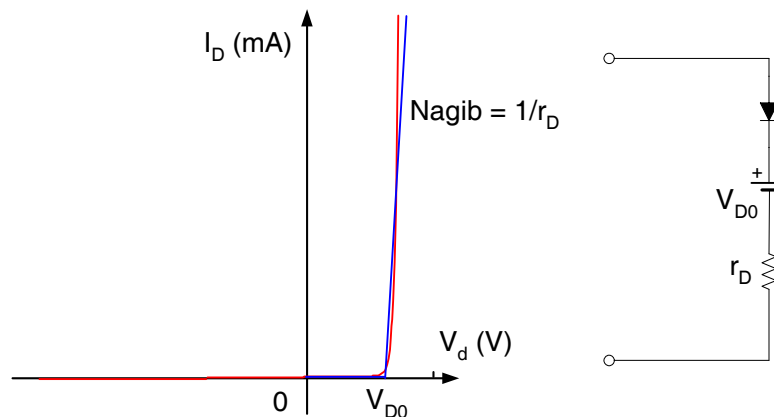
Idealna dioda predstavlja najjednostavniji model diode. Ako je dioda direktno polarisana, uzima se da je napon na njoj nula. Ako je dioda inverzno polarisana uzima se da je struja kroz nju nula. Dakle, direktno polarisana dioda približno odgovara kratkom spoju, dok inverzno polarisana dioda predstavlja otvorenu vezu. To je grafički predstavljeno na slici 7.6.



Slika 7.6: Karakteristika idealne diode i njen simbol.

7.5.3 Izlomljeno linearni model diode

Izlomljeno linearni model diode je zasnovan na jednostavnoj linearizaciji nelinearne karakteristike diode, koja je prikazana na slici 7.7a.

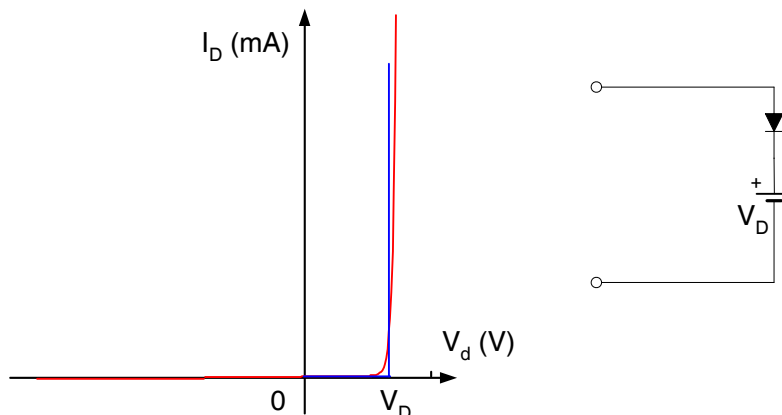


Slika 7.7: (a) Izlomljeno linearna aproksimacija karakteristike diode, (b) Električni model.

Električni model kojim se realizuje ovakva karakteristika prikazan je na slici 7.7b. Parametri modela su $V_{D0} \approx 0.65 \text{ V}$ i $r_D \approx 20 \Omega$. U model je uključena i idealna dioda da bi se obezbedilo da struja teče samo pri direktnoj polarizaciji diode.

7.5.4 Model diode sa konstantnim padom napona

Najčešće korišćeni model diode u praktičnim izračunavanjima dobija se uprošćenjem izlomljeno linearnog modela, tako što se stavi da $r_D \rightarrow 0 \Omega$. Onda drugi segment izlomljeno linearne karakteristike postaje vertikalalan, kao na slici 7.8a. Najčešće se uzima da je $V_D = 0.7 \text{ V}$.



Slika 7.8: (a) Aproksimacija karakteristike diode sa konstantnim naponom, (b) Električni model.

7.5.5 Model diode za male signale

Pretpostavimo da se napon na direktno polarisanoj diodi sastoji od fiksnog dela i promenljivog dela, koje ćemo označiti po sledećoj konvenciji:

$$v_d = V_D + v_d, \text{ gde je } v_d \ll V_T \quad (7.4)$$

Pošto je varijacija napona na diodi mala, za struju diode se može pisati:

$$\begin{aligned} i_D &= I_S e^{v_d/V_T} = I_S e^{(V_D+v_d)/V_T} = I_S e^{V_D/V_T} e^{v_d/V_T} = I_D e^{v_d/V_T} \\ &\approx I_D \left(1 + \frac{v_d}{V_T}\right) = I_D + \frac{I_D}{V_T} v_d = I_D + \frac{1}{r_d} v_d = I_D + i_d \end{aligned} \quad (7.5)$$

Dakle za promenljivu komponentu struje diode važi jednačina:

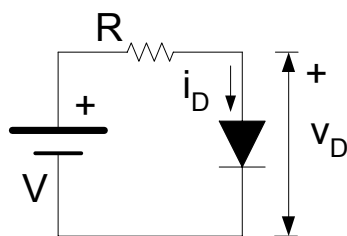
$$i_d = \frac{1}{r_d} v_d \quad (7.6)$$

gde se r_d naziva *otpornost diode za male signale*. Recipročna vrednost otpornosti diode za male signale predstavlja nagib tangente karakteristike diode u tački koja je određena fiksnim delovima napona i struje diode.

Dakle, za male signale dioda se može modelovati otpornikom, čija je vrednost jednaka otpornosti diode za male signale r_d .

7.6 Radna tačka diode

Posmatrajmo jednostavno kolo sa diodom, kao na slici 7.9:



Slika 7.9: Elementarno kolo sa diodom.

Kako odrediti struju i napon na diodi, kada su vrednosti napona baterije V i otpornika R poznate? Dioda je direktno polarisana i kroz nju teče značajna struja. Mogu se napisati dve jednačine. Jedna od njih je nelinearna jednačina diode:

$$I_D = I_S e^{V_D/V_T} \quad (7.7)$$

dok je druga jednačina po drugom Kirhofovom zakonu linearna:

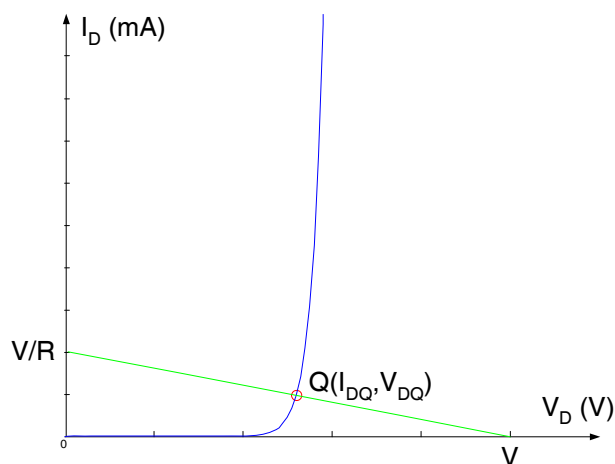
$$V - RI_D - V_D = 0 \quad (7.8)$$

Iz druge jednačine se dobija jednačina prave u sistemu (I_D, V_D) :

$$I_D = -\frac{1}{R}V_D + \frac{1}{R}V \quad (7.9)$$

koja se naziva *radna prava*.

Obe jednačine se mogu predstaviti grafički, kao na slici 7.10, pa se i do rešenja sistema jednačina može doći grafičkim putem. Rešenje sistema jednačina je presek jednačine diode i radne prave definisane drugim Kirhofovom zakonom i naziva se *mirna radna tačka*.



Slika 7.10: Jednačina diode i radna prava u istom sistemu karakteristika.

Drugi način određivanja radne tačke je da se reši sistem od jedne linearne i jedne nelinearne jednačine nekim metodom rešavanja nelinearnih jednačina iz numeričke analize. Najčešće se rešavanje nelinearne jednačine, ili sistema nelinearnih jednačina, svodi na iterativno rešavanje sistema linearnih jednačina. Ovaj metod rešavanja nelinearnih kola se koristi u računarskim programima za analizu kola, kao što je, na primer, poznati program SPICE.

7.7 Primene i vrste dioda

Kao što se vidi iz jednačine za struju diode (7.1), osobine diode znatno zavise od:

- Materijala od kojeg je napravljena dioda,
- Geometrijskih karakteristika spoja,
- Temperature.

Diode su važan i često korišćeni element u savremenoj elektronici. Pošto se dioda ne može realizovati tako da se istovremeno ostvare sve povoljne karakteristike, diode se proizvode sa karakteristikama koje najviše odgovaraju njihovoj nameni. Tako se kod proizvođača poluprovodničkih komponenata mogu nabaviti razne vrste dioda, kao što su:

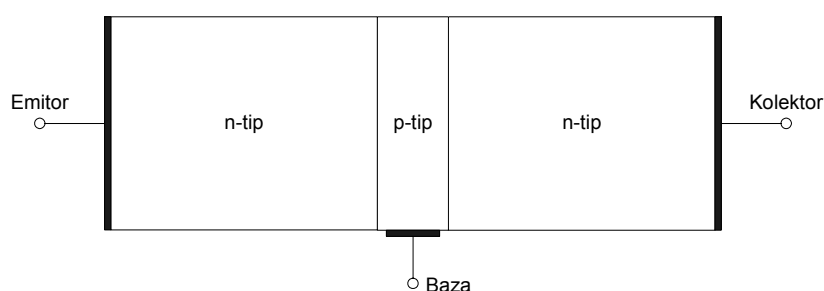
- Diode za usmerače malih snaga,
- Diode za usmerače velikih snaga,
- Diode za prekidački režim rada
- Diode za rad na visokim učestanostima,
- Diode promenljive kapacitivnosti (varikap ili varaktor diode),
- Fotodiode,
- Svetleće (LED) diode, itd.

Detaljnije karakteristike dioda se mogu naći u publikacijama proizvođača (data sheet) u papirnoj formi (katalozi) ili na Internetu.

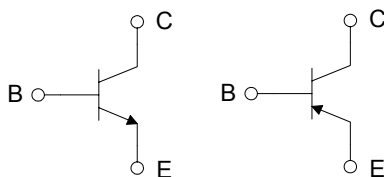
8. Bipolarni tranzistor

8.1 Struktura i simboli bipolarnog tranzistora

Bipolarni tranzistor je poluprovodnička struktura sa tri elektrode. Bipolarni tranzistor predstavlja sendvič strukturu sačinjenu od tri različito dopirane poluprovodničke oblasti koje formiraju dva *pn* spoja: *npn* ili *pnp*. Najviše dopirana oblast predstavlja *emitor*, središnja oblast se naziva *baza*, dok je najmanje dopirana oblast *kolektora*. Radi korektnog funkcionisanja tranzistora, *baza mora biti vrlo uska*. Sve tri oblasti imaju metalne kontakte kojima se vrši priključivanje tranzistora u kolo. U praksi se, zbog boljih električnih karakteristika, mnogo više koriste *npn* tranzistori pa će se analiza rada tranzistora uglavnom odnositi na *npn* tranzistore.



Slika 8.1: Uprošćeni prikaz strukture bipolarnog npn tranzistora.



Slika 8.2: Simboli npn i pnp tranzistora.

Zavisno od polarizacije spojeva emitor-baza (emitorski spoj) i kolektor-baza (kolektorski spoj), *npn* tranzistor se može naći u različitim režimima rada, koji su prikazani u sledećoj tabeli:

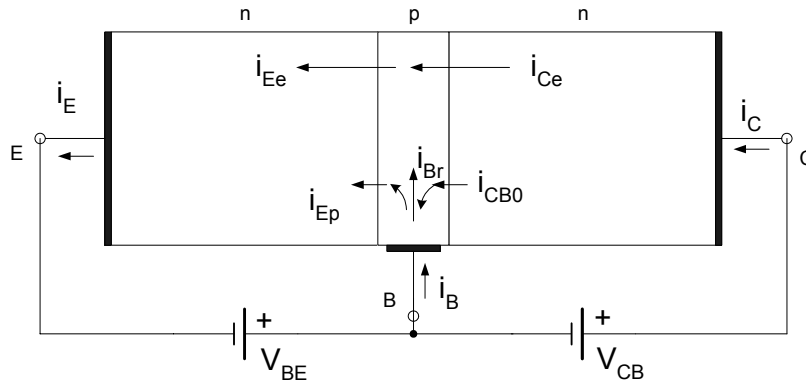
Režimi rada tranzistora

Režim rada	Emitor-baza	Kolektor-baza	Namena
Aktivni režim	Direktna polarizacija	Inverzna polarizacija	Pojačavači
Zasićenje	Direktna polarizacija	Direktna polarizacija	Prekidači
Zakočenje	Inverzna polarizacija	Inverzna polarizacija	Prekidači

Iako postoji još jedna kombinacija za polarizaciju spojeva, ona se u praksi vrlo retko koristi i zbog toga nije navedena u tabeli. Aktivni režim se koristi u pojačavačkim kolima, koja se proučavaju u analognoj elektronici. Režimi zasićenja i zakočenja se koriste u elektronskim prekidačima i proučavaju se u impulsnoj i digitalnoj elektronici.

8.2 Rad bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu

U aktivnom režimu rada emitorski spoj je direktno polarisan, a kolektorski spoj je inverzno polarisan. Polarizacija se ostvaruje priključivanjem baterija odgovarajućeg polariteta, kao na slici 8.3.



Slika 8.3: Struje u aktivnom režimu rada npn tranzistora.

Za razmatranje rada tranzistora u aktivnom režimu najbolje je poći od emitorskog spoja koji je direktno polarisan, i prema tome ima dve difuzione struje većinskih nosilaca sa obe strane spoja:

1. Struja elektrona od emitora ka bazi I_{Ee}
2. Struja šupljina od baze ka emitoru I_{Ep}

čiji zbir predstavlja struju emitora:

$$I_E = I_{Ee} + I_{Ep} \approx I_{Ee}, \quad \text{jer je } I_{Ep} \ll I_{Ee} \quad (8.1)$$

Elektroni koji su iz emitora prešli u bazu u njoj predstavljaju manjinske nosioce. Pre uspostavljanja direktne polarizacije emitorskog spoja i ubacivanja elektrona, ravnotežna koncentracija elektrona u bazi je bila veoma mala. Ubačeni elektroni znatno povećavaju koncentraciju elektrona u bazi naročito u blizini emitorskog spoja. S druge strane, kolektorski spoj je inverzno polarisan pa električno polje izaziva kretanje manjinskih nosilaca preko spoja. Zbog toga je oko kolektorskog spoja koncentracija manjinskih nosilaca (elektrona u bazi i šupljina u kolektoru) izuzetno mala. Dakle, koncentracija elektrona u bazi opada sa velike vrednosti oko emitorskog spoja na malu vrednost oko kolektorskog spoja. Pošto je baza veoma uska, može se opravdano smatrati da je koncentracija elektrona opada po linearnom zakonu. Kao posledica neuniformne koncentracije, elektroni u bazi se kreću difuzijom od emitorskog ka kolektorskom spoju. S obzirom da u bazi postoje i šupljine, izvestan broj elektrona se na svom putu od emitorskog ka kolektorskom spoju rekombinuje i ne stigne do kolektora. S obzirom na malu širinu baze, broj rekombinovanih elektrona je mali.

Na inverzno polarisanom kolektorskom spoju postoje dve komponente struje manjinskih nosilaca usled električnog polja:

1. Struja elektrona od baze ka kolektoru I_{Ce}
2. Struja šupljina od kolektora ka bazi I_{CB0}

koje u zbiru daju struju kolektora:

$$I_C = I_{Ce} + I_{CB0} \approx I_{Ce}, \text{ jer je } I_{CB0} \ll I_{Ce} \quad (8.2)$$

Struja baze se sastoji od tri komponente:

1. Struja šupljina od baze ka emitoru I_{Ep}
2. Struja šupljina od kolektora ka bazi I_{CB0}
3. Struja usled rekombinacije elektrona u bazi I_{Br}

tako da je:

$$I_B = I_{Br} + I_{Ep} - I_{CB0} \quad (8.3)$$

Odnos struje elektrona koji prelaze u kolektor i struje emitora obeležava se sa α i naziva *koeffcijent strujnog pojačanja od emitora do kolektora*:

$$\alpha = \frac{I_{Ce}}{I_E} = \frac{I_C - I_{CB0}}{I_E} \approx \frac{I_C}{I_E} \quad (8.4)$$

odakle se uz pomoć jednačine $I_E = I_B + I_C$ dobija:

$$I_C = \frac{\alpha}{1-\alpha} I_B + \frac{1}{1-\alpha} I_{CB0} = \beta I_B + (\beta+1) I_{CB0} \approx \beta I_B \quad (8.5)$$

Faktor β se naziva *koeffcijent strujnog pojačanja od baze do kolektora*.

Tipične vrednosti za faktor α su od 0.95 do 0.999, a za faktor β od 20 do 1000.

8.2.1 Model npn tranzistora za velike signale

Relacija $I_C \approx \beta I_B$ pokazuje suštinu rada tranzistora, koja se ogleda u činjenici da se *malom strujom baze može kontrolisati znatno veća kolektorska struja*.

Pošto je struja baze eksponencijalnog karaktera:

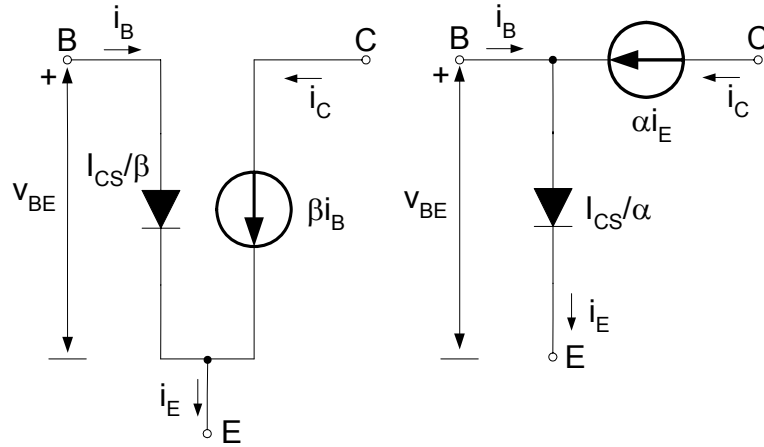
$$I_B = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} \quad (8.6)$$

onda i kolektorska struja ima istu zavisnost:

$$I_C = \beta I_B = \beta I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} = I_{CS} e^{V_{BE}/V_T} \quad (8.7)$$

dakle, struja kolektora eksponencijalno zavisi od ulaznog napona.

Dakle, koristeći prethodne relacije, najprostiji modeli *npn* bipolarnog tranzistora u aktivnom režimu mogu se napraviti korišćenjem kontrolisanih strujnih izvora. Dva takva modela su prikazana na slici 8.4:



Slika 8.4: Modeli npn tranzistora za velike signale u aktivnom režimu rada.

8.2.2 Model tranzistora za male signale

Pretpostavimo da se pobudni napon tranzistora sastoji od fiksnog dela i malog promenljivog dela, koje ćemo označiti po sledećoj konvenciji:

$$v_{BE} = V_{BE} + v_{be}, \text{ gde je } v_{be} \ll V_T \quad (8.8)$$

Pošto je varijacija pobudnog napona mala, onda se za struju baze može pisati:

$$\begin{aligned} i_B &= I_{BS} e^{v_{BE}/V_T} = I_{BS} e^{(V_{BE}+v_{be})/V_T} = I_{BS} e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_B e^{v_{be}/V_T} \approx I_B \left(1 + \frac{v_{be}}{V_T}\right) = I_B + \frac{I_B}{V_T} v_{be} = I_B + \frac{1}{r_\pi} v_{be} = I_B + i_b \end{aligned} \quad (8.9)$$

odnosno, ona se sastoji od fiksne i promenljive komponente. Fiksna komponenta ulaznog napona određuje fiksnu komponentu struje baze, tj. određuje mirnu radnu tačku. Promenljiva komponenta ulaznog napona određuje promene struje baze oko radne tačke. Parametar $r_\pi = V_T/I_B$ očigledno zavisi od radne tačke tranzistora.

Na sličan način se za struju kolektora dobija:

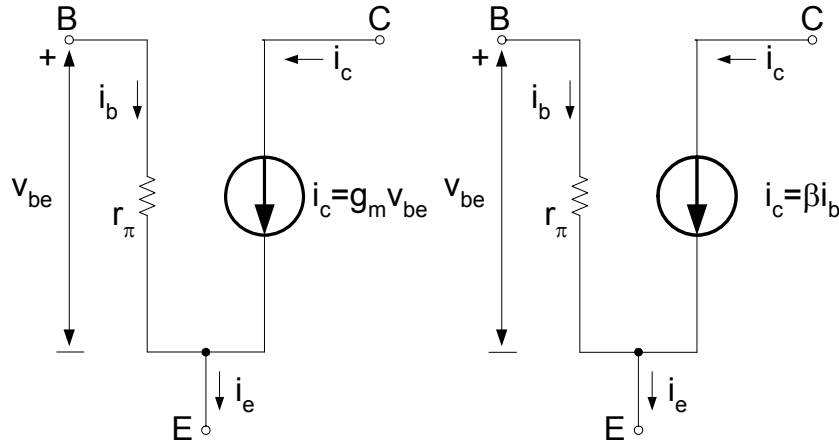
$$\begin{aligned} i_C &= \beta i_B = I_{CS} e^{v_{BE}/V_T} = I_{CS} e^{(V_{BE}+v_{be})/V_T} = I_{CS} e^{V_{BE}/V_T} e^{v_{be}/V_T} \\ &= I_C e^{v_{be}/V_T} \approx I_C \left(1 + \frac{v_{be}}{V_T}\right) = I_C + \frac{I_C}{V_T} v_{be} = I_C + g_m v_{be} = I_C + i_c \end{aligned} \quad (8.10)$$

tj. i ona se sastoji od fiksne i promenljive komponente. Fiksna komponenta ulaznog napona određuje fiksnu komponentu kolektorske struje, a promenljiva komponenta ulaznog napona određuje promene kolektorske struje oko radne tačke. Parametar $g_m = I_C/V_T$ naziva se *transkonduktansa* tranzistora. Očigledno, postoji veza:

$$g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{\beta I_B}{V_T} = \frac{\beta}{r_\pi} = \frac{1}{r_e} \quad (8.11)$$

gde se $r_e = v_{be}/i_b = 1/g_m$ naziva *emitorska otpornost*.

Relacije $v_{be} = r_\pi i_b$, $i_c = \beta i_b$ i $i_c = g_m v_{be}$ predstavljaju matematički model tranzistora za male signale, koji je u literaturi poznat kao *hibridni π model*. Dve verzije ovog modela su prikazane na slici 8.5.



Slika 8.5: Hibridni π modeli tranzistora za male signale.

U praktičnoj primeni modela za male signale u analizi pojačavačkih kola sa bipolarnim tranzistorima, tranzistor se zamenjuje svojim modelom, dok se nezavisni jednosmerni izvori anuliraju (naponski izvori se kratkospajaju, a strujni izvori se raskidaju). Posle toga se formira odgovarajući sistem jednačina, čijim se rešenjem dobijaju tražene veličine.

8.3 Ulazne i izlazne karakteristike tranzistora

Ulazna karakteristika tranzistora je zavisnost $i_B = f_1(v_{BE})$, pri čemu je napon v_{CE} parametar. Ova zavisnost ima eksponencijalni karakter.

Izlazna karakteristika tranzistora je zavisnost $i_C = f_3(v_{CE})$ pri čemu je struja baze i_B parametar.

Karakteristika prenosa tranzistora je zavisnost $i_C = f_2(v_{BE})$, pri čemu je napon v_{CE} parametar. Ova zavisnost ima eksponencijalni karakter.

Ove karakteristike se daju u katalogima i koriste se u procesu projektovanja.

8.4 Polarizacija tranzistora

Pod polarizacijom tranzistora se podrazumeva dovođenje odgovarajućih jednosmernih napona na njegove elektrode, koje će ga postaviti u određeni radni režim. Za aktivni režim je potrebno da se emitorski spoj polariše direktno a kolektorski spoj inverzno. To se može uraditi korišćenjem dve baterije kao na slici 8.6.

Jednosmerni radni uslovi se određuju na sledeći način. Prvo se za kolo baze napiše jednačina:

$$V_{BB} - R_B I_B - V_{BE} = 0 \quad (8.12)$$

odakle je:

$$I_B = \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \quad (8.13)$$

a iz kolektorskog kola se dobija:

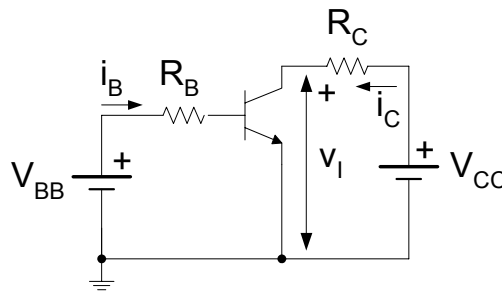
$$V_I + R_C I_C - V_{CC} = 0 \quad (8.14)$$

odnosno:

$$I_C = \beta I_B = \beta \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \quad (8.15)$$

$$V_I = V_{CC} - R_C I_C = V_{CC} - R_C \beta I_B = V_{CC} - R_C \beta \frac{V_{BB} - V_{BE}}{R_B} \quad (8.16)$$

čime je potpuno određena radna tačka.

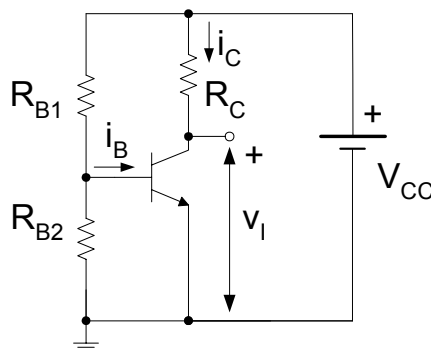


Slika 8.6: Polarizacija npn tranzistora za rad u aktivnom režimu.

Jednačina radne prave, koja se crta u polju karakteristika $i_C = f_3(v_{CE})$, je:

$$I_C = -\frac{V_{CE}}{R_C} + \frac{V_{CC}}{R_C} \quad (8.17)$$

U praksi se izbegava napajanje sa dve baterije, pa je potrebno i bazno kolo napajati iz iste baterije kao i kolektor. To se lako može izvesti sledećim kolom:



Slika 8.7: Polarizacija npn tranzistora za rad u aktivnom režimu.

Primenom Tevenenove teoreme na ulazno kolo, koje se sastoji od baterije V_{CC} i otpornika R_{B1} i R_{B2} , lako se dobija:

$$V_{BB} = V_{CC} \frac{R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}}, \quad R_B = \frac{R_{B1} R_{B2}}{R_{B1} + R_{B2}} \quad (8.18)$$

čime se kolo za polarizaciju svodi na već analizirani slučaj sa dve baterije.

U električnim šemama elektronskih kola je uobičajeno da se zbog jednostavnosti ne crta baterija V_{CC} .

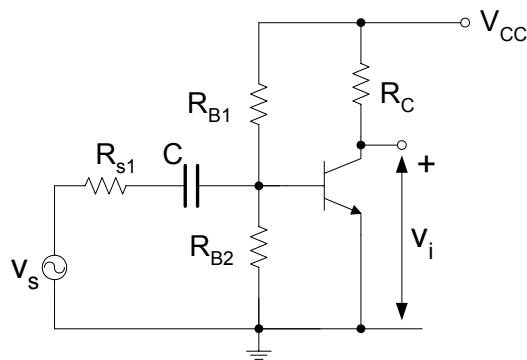
8.5 Osnovna pojačavačka kola sa jednim tranzistorom

S obzirom da se kod bipolarnog tranzistora struja kolektora može kontrolisati promenom struje baze, odnosno promenom napona baza-emitor, bipolarni tranzistor može poslužiti kao pojačavač signala. Pošto se promenljivi ulazni signal uvek mora dovesti između baze i emitora, a izlaz se može uzeti bilo sa kolektora bilo sa emitora, zavisno od toga koja je od elektroda tranzistora na konstantnom potencijalu razlikuju se tri osnovne konfiguracije: *pojačavač sa zajedničkim emitorom*, *pojačavač sa zajedničkim kolektorom* i *pojačavač sa zajedničkom bazom*.

U daljem tekstu će biti analizirane sve tri konfiguracije u režimu rada sa malim signalima i biće određene njihove osnovne karakteristike: naponsko pojačanje, strujno pojačanje, ulazna otpornost i izlazna otpornost. Princip analize će uvek biti isti. Tranzistor će biti zamenjen modelom za male signale, kraktospojiće se jednosmerni naponski izvori, formiraće se i rešiti jednačine koje opisuju kolo i na kraju će biti nađeni odgovarajući odnosi.

8.5.1 Pojačavač sa zajedničkim emitorom

Pojačavač sa zajedničkim (uzemljenim) emitorom je najčešće i najkorisnije kolo sa jednim tranzistorom koje je prikazano na slici 8.8. Vidi se da je pobuda priključena između baze i emitora (mase), a da se izlazni napon uzima između kolektora i emitora (mase).

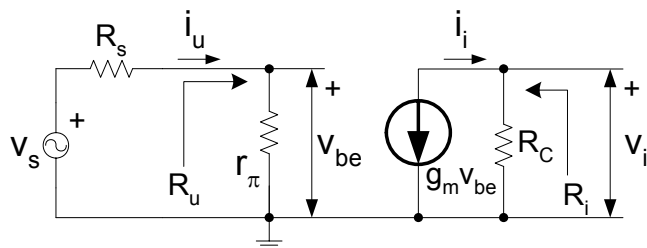


Slika 8.8: Pojačavač sa zajedničkim emitorom.

Posle zamene ulaznog kola po Tevenenovoj teoremi, zamene tranzistora hibridnim π modelom za male signale i kratkospajanja jednosmernih izvora, dobija se kolo prikazano na slici 8.9, gde otpornik R_s predstavlja ekvivalentnu otpornost pobudnog izvora i otpornika R_{B1} i R_{B2} za polarizaciju tranzistora.

Iz ulaznog dela kola lako se dobija:

$$v_{be} = \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi} v_s \quad (8.19)$$



Slika 8.9: Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim emitorom.

pa je naponsko pojačanje:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{-g_m v_{be} R_C}{v_s} = -g_m R_C \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi} = -\beta \frac{R_C}{R_s + r_\pi} \quad (8.20)$$

Iz izraza za naponsko pojačanje se vidi da u slučaju kada je $R_s \gg r_\pi$, naponsko pojačanje $A_v \approx -\beta R_C / R_s$ jako zavisi od β , što nije dobro jer ovaj parametar može mnogo da varira od primerka do primerka istog tipa tranzistora. S druge strane, ako je $R_s \ll r_\pi$, naponsko pojačanje $A_v \approx -g_m R_C$ je praktično nezavisno od parametra β .

Strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkim emitorom je:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{-g_m \frac{r_\pi}{R_s + r_\pi} v_u}{\frac{v_u}{R_s + r_\pi}} = -g_m r_\pi = -\beta \quad (8.21)$$

Za ulaznu otpornost pojačavača sa zajedničkim emitorom lako se dobija:

$$R_u = r_\pi \quad (8.22)$$

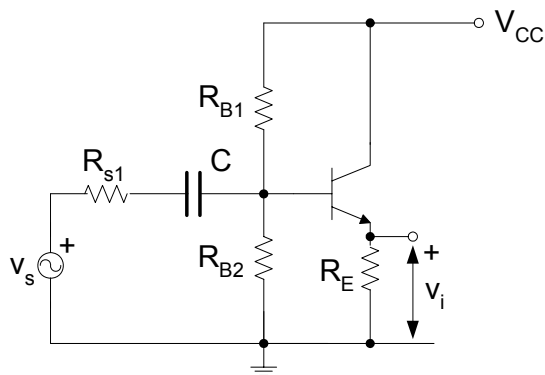
dok je izlazna otpornost:

$$R_i = R_C \quad (8.23)$$

Dakle, *pojačavač sa zajedničkim emitorom može imati veliko naponsko i strujno pojačanje, ulazna otpornost mu nije velika, dok je izlazna otpornost određena vrednošću otpornika u kolu kolektora i obično ima veliku vrednost.* Naponsko pojačanje je negativno što znači da u slučaju naizmeničnog pobudnog napona pojačavač sa zajedničkim emitorom unosi faznu razliku od 180° između ulaznog i izlaznog signala, odnosno obrće fazu.

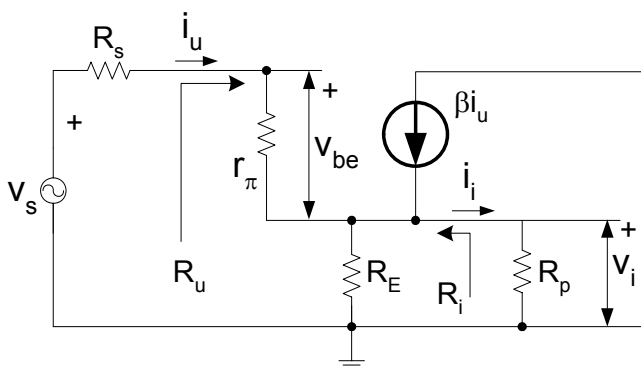
8.5.2 Pojačavač sa zajedničkim kolektorom

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) kolektorom, koji je prikazan na slici 8.10, kolektor je vezan direktno na bateriju za napajanje, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između baze i kolektora (mase), a izlazni napon se uzima između emitora i kolektora (mase).



Slika 8.10: Pojačavač sa zajedničkim kolektorom.

Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim kolektorom dobija se na isti način kao kod pojačavača sa zajedničkim emitorom i prikazano je na slici 8.11.



Slika 8.11: Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkim kolektorom.

U kolu sa slike 8.11 emitorski otpornik R_E i otpornost potrošača R_p su vezani paralelno i kroz njihovu kombinaciju protiče struja $(\beta+1)i_u$. Ako sa v_b označimo promenljivi napon na bazi, za naponsko pojačanje se lako dobija:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{v_b}{v_s} \frac{v_i}{v_b} = \frac{r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{R_s + r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)} \frac{(\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)} = \frac{(\beta+1)(R_E \parallel R_p)}{R_s + r_\pi + (\beta+1)(R_E \parallel R_p)} \quad (8.24)$$

Pošto je najčešće $R_s + r_\pi \ll (\beta+1)(R_E \parallel R_p)$, naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkim kolektorom je vrlo blisko jedinici, ali uvek manje od jedan.

$$A_v \approx 1 \quad (8.25)$$

Za strujno pojačanje se dobija:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{(\beta+1)R_E}{R_E + R_p} \approx \beta+1 \quad (8.26)$$

jer je $R_p \ll R_E$. Dakle, strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkim kolektorom je vrlo veliko.

Sa slike 8.11 se može odrediti i *ulazna otpornost*:

$$R_u = r_\pi + (\beta + 1)(R_E \parallel R_p) \quad (8.27)$$

koja ima veliku vrednost, dok je izlazna otpornost

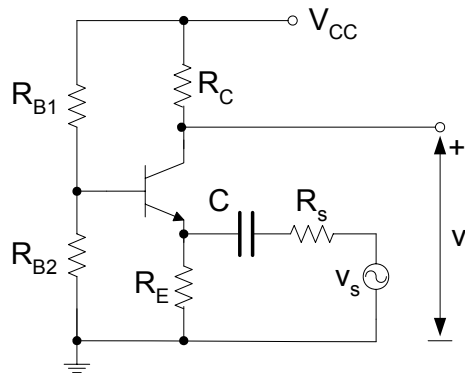
$$R_i = R_E \parallel \left(\frac{r_\pi + R_s}{\beta + 1} \right) = R_E \parallel \left(r_e + \frac{R_s}{\beta + 1} \right) \approx r_e + \frac{R_s}{\beta + 1} \quad (8.28)$$

odnosno, *izlazna otpornost pojačavača sa zajedničkim kolektorom je vrlo mala*.

Dakle, pojačavač sa zajedničkim kolektorom ima jedinično naponsko i značajno strujno pojačanje, ulazna otpornost mu je velika, dok je izlazna otpornost vrlo mala. Naponsko pojačanje je pozitivno, odnosno, pojačavač sa zajedničkim kolektorom ne obrće fazu.

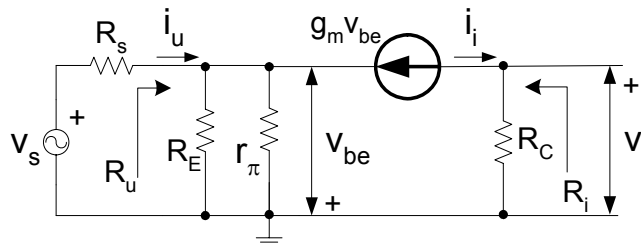
8.5.3 Pojačavač sa zajedničkom bazom

Kod pojačavača sa zajedničkom (uzemljenom) bazom, koji je prikazan na slici 8.12, baza je vezana na konstantan napon iz razdelnika napona, odnosno vezana je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između emitora i baze (mase), a izlazni napon se uzima između kolektora i baze (mase).



Slika 8.12: Pojačavač sa zajedničkom bazom.

Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkom bazom dobija se na isti način kao kod pojačavača sa zajedničkim emitorom i prikazano je na slici 8.13.



Slika 8.13: Ekvivalentno kolo pojačavača sa zajedničkom bazom.

Sa slike 8.13 se posle kraćeg izračunavanja dobija naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom:

$$A_v = \frac{v_i}{v_s} = \frac{g_m r_\pi R_C}{r_\pi + (g_m r_\pi + 1)R_s} \quad (8.29)$$

koje je vrlo stabilno, jer je skoro nezavisno od β . Ako je $r_\pi \ll (g_m r_\pi + 1)R_s$, naponsko pojačanje je približno jednako

$$A_v \approx \frac{R_C}{R_s} \quad (8.30)$$

dok je u slučaju kada je otpornost pobudnog generatora vrlo mala,

$$A_v \approx g_m R_C \quad (8.31)$$

Strujno pojačanje pojačavača sa zajedničkom bazom je:

$$A_i = \frac{i_i}{i_u} = \frac{\beta}{\beta + 1} = \alpha \approx 1 \quad (8.32)$$

odnosno, blisko je, ali manje od jedan.

Ulazna otpornost pojačavača sa zajedničkom bazom:

$$R_u = \frac{R_E \parallel r_\pi}{\beta + 1} \approx r_e \quad (8.33)$$

je vrlo mala, dok je izlazna otpornost:

$$R_i = R_C \quad (8.34)$$

Dakle, *pojačavač sa zajedničkom bazom ima veliko naponsko i jedinično strujno pojačanje, ulazna otpornost mu je vrlo mala, dok je izlazna otpornost određena vrednošću otpornika u kolu kolektora i obično ima veliku vrednost.* Naponsko pojačanje je pozitivno, odnosno, pojačavač sa zajedničkom bazom ne obrće fazu.

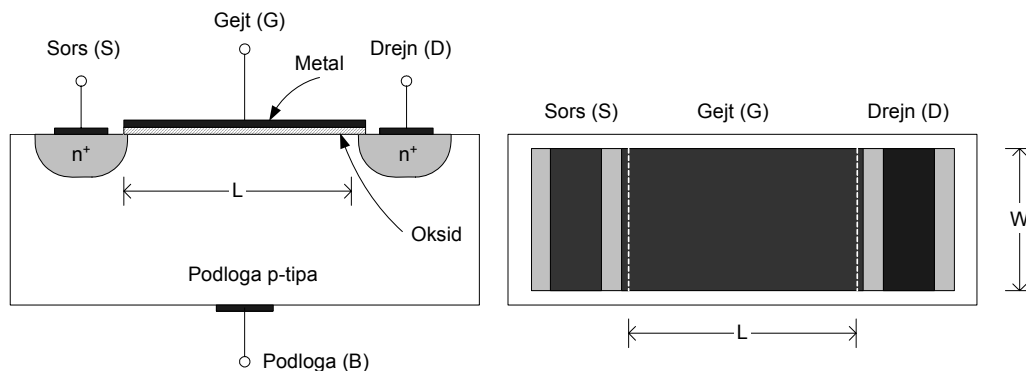
9. MOS tranzistor (MOSFET)

Pored bipolarnog tranzistora, u savremenoj elektronici se koristi još jedan tip tranzistora, poznat kao MOSFET tranzistor. Skraćenica MOSFET (**M**etal **O**xide **S**emiconductor **F**ield **E**ffect **T**ransistor) ukratko opisuje strukturu i princip rada ovog tipa tranzistora. Za razliku od bipolarnog tranzistora, kontrolna elektroda je kod MOS tranzistora izolovana, a kontrola struje se vrši električnim poljem. Kao posledica ove činjenice, struja se sastoji samo od jednog tipa nosilaca (elektrona kod NMOS tranzistora ili šupljina kod PMOS tranzistora), tako da se ovaj tip tranzistora često naziva i *unipolarni tranzistor*.

Princip rada MOS tranzistora opisan je još 1930. godine, znatno pre pojave bipolarnih tranzistora, ali je zbog teškoća u realizaciji prvi MOS tranzistor eksperimentalno realizovan tek sredinom sedme decenije dvadesetog veka. Tek krajem sedamdesetih godina 20. veka, MOS tranzistori ulaze u širu upotrebu. Zbog svojih osnovnih osobina da imaju jednostavnu strukturu i male dimenzije, MOS tranzistori su postali dominantni u realizaciji digitalnih logičkih funkcija i memorija, ali se sve više koriste i u realizaciji analognih elektronskih kola

9.1 Struktura i simboli MOS tranzistora

Uprošćena struktura NMOS tranzistora je prikazana na slici 9.1, gde je na levoj strani prikazan poprečni presek kroz NMOS tranzistor, a na desnoj strani pogled odozgo na isti tranzistor. Kao što se vidi, NMOS tranzistor se realizuje na podlozi (supstratu) p tipa, u kojoj su postupkom difuzije napravljena dva jako dopirana n^+ regiona, koji se nazivaju *sors* (source) i *drejn* (drain). Površina između sorsa i drejna je prekrivena tankim slojem (20-100 nm) silicijum dioksida (SiO_2), preko koga je nanesen sloj metala, koji čini treću, kontrolnu elektrodu, koja se naziva *gejt* (gate). Da bi se ostvarila veza sa ostatkom električnog kola, područja sorsa i drejna, kao i podloga, imaju metalne kontakte. Dakle, MOS tranzistor ima četiri elektrode. Međutim, za osnovna objašnjenja rada MOS tranzistora uticaj podloge je mali, tako da ćemo u daljim izlaganjima MOS tranzistor tretirati kao poluprovodnički element sa tri elektrode. Interesantno je, za razliku od bipolarnog tranzistora, da je struktura MOS tranzistora potpuno simetrična.

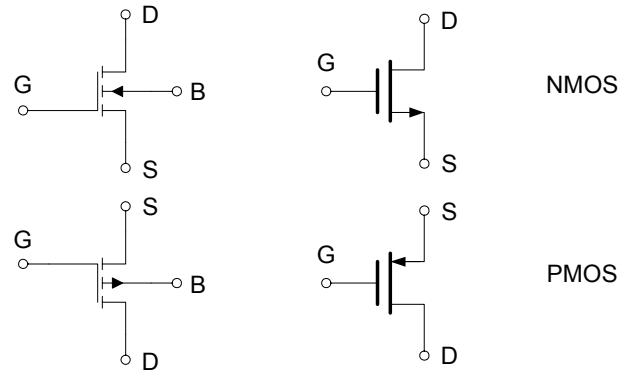


Slika 9.1: Struktura NMOS tranzistora.

Dimenzije MOS tranzistora su veoma male. Tipične vrednosti rastojanja sorsa i drejna, L , su od 1 do 10 μm , dok su tipične vrednosti širine istog područja, W , od 2 do 500 μm . U savremenim integrisanim kolima velike složenosti, kao što su mikroprocesori i memorije,

minimalne dimenzije su ispod 1 μm , što omogućava realizaciju više miliona tranzistora na jednoj silicijumskoj podlozi (čipu).

Pored NMOS tranzistora, koji je prikazan na slici 9.1, postoji još jedan tip MOS tranzistora, poznat kao PMOS tranzistor. On se realizuje na podlozi n tipa, dok su područja sorsa i drejna jako dopirani p^+ regioni. Simboli NMOS i PMOS tranzistora koji se koriste u električnim šemama prikazani su na slici 9.2.



Slika 9.2: Potpuni i uprošćeni simboli NMOS i PMOS tranzistora.

9.2 Princip rada NMOS tranzistora

Kada na gejt nije priključen nikakav napon, između sorsa i drejna su vezane dve diode na red. Jednu diodu čine podloga i n^+ oblast sorsa, a drugu diodu podloga i n^+ oblast drejna. Ove dve diode sprečavaju protok struje od drejna do sorsa kada se primeni napon v_{DS} . Između sorsa i drejna postoji velika otpornost, reda $10^{12} \Omega$.

Pretpostavimo sada da su sors i drejn vezani na masu, a da je na gejt doveden pozitivan napon v_{GS} . Ovaj pozitivan napon odbija šupljine, koje su većinski nosioci u podlozi, dalje od područja ispod gejta i ostavlja nepokretne, negativno naelektrisane akceptorske atome. Dakle, ispod gejta se stvara oblast u kojoj ima malo pokretnih nosilaca, koja se naziva *osiromašena oblast*.

Međutim, dovoljno veliki pozitivan napon na gejt može da privuče slobodne elektrone iz n^+ oblasti sorsa i drejna. Ovi slobodni elektroni se grupišu u podlozi neposredno ispod gejta i stvaraju provodnu n oblast koja se naziva *kanal*. Ako se između drejna i sorsa primeni neki napon v_{DS} , kroz kanal će proteći struja. Dakle, pozitivan napon na gejt izaziva stvaranje ili indukciju kanala, tako da se ova vrsta MOS tranzistora naziva *tranzistor sa indukovanim n kanalom*. S obzirom da su slobodni nosioci u kanalu elektroni, ovaj tranzistor se naziva i NMOS tranzistor sa indukovanim kanalom. Takođe, treba primetiti da se celokupna struja sastoji od kretanja elektrona, a da šupljine nemaju nikakav uticaj. Zbog toga što u formiranju struje učestvuje samo jedan tip nosilaca (suprotan od tipa podloge), ovakvi tranzistori se nazivaju i *unipolarni tranzistori*.

Minimalni napon između gejta i sorsa koji obezbeđuje formiranje kanala naziva se *napon praga provođenja* i obeležava sa V_t . Vrednosti ovog napona zavise od proizvodnog procesa i tipično se nalaze u opsegu od 1 V do 3 V.

Metalna elektroda gejta, oksid između gejta i podloge i podloga formiraju kondenzator. Kada se dovede napon na gejt, u dielektriku kondenzatora se pojavljuje električno polje. To električno polje kontroliše broj slobodnih nosilaca u kanalu, odnosno provodnost kanala. Zato se

MOS tranzistori svrstavaju u grupu *tranzistora sa efektom polja*, jer se električnim poljem reguliše struja kroz kanal kada se primeni napon v_{DS} .

9.2.1 Ponašanje NMOS tranzistora pri malim naponima V_{DS}

Pretpostavimo da je između gejta i sorsa doveden napon $v_{GS} > V_t$, tako da je formiran indukovani kanal, kao i da je između drejna i sorsa primenjen mali pozitivan napon v_{DS} reda stotinak mV. Kroz indukovani kanal će se kretati elektroni od sorsa ka drejnu, odnosno kroz kanal će proticati struja čiji je smer od drejna ka sorsu. Smer ove struje pokazuje strelica u uprošćenom simbolu NMOS tranzistora. Jačina struje zavisi od broja slobodnih nosilaca u kanalu, a broj slobodnih nosilaca zavisi od razlike napona v_{GS} i napona praga V_t , $v_{GS} - V_t$, koji se ponegde naziva i *efektivni napon*. Dakle, struja drejna i_D biće proporcionalna naponu $v_{GS} - V_t$ i naponu v_{DS} . Struja sorsa je jednaka struji drejna, s obzirom da je struja gejta jednaka nuli jer je gejtz izolovana elektroda.

Dakle, u režimu malih napona drejn-sorsa, NMOS tranzistor radi kao *otpornik čija se otpornost može kontrolisati naponom na gejtu*.

Detaljnijim razmatranjem fizičkih pojava u kanalu može se izvesti jednačina zavisnosti struje i_D od napona v_{GS} i v_{DS} , što izlazi izvan okvira ovog predmeta. Kao krajnji rezultat se dobija jednačina:

$$i_D = \frac{1}{2} \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{t_{ox}} \frac{W}{L} [2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2] = k_n \frac{W}{L} [2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2] \quad (9.1)$$

Dakle, struja drejna zavisi od fizičkih konstanti (μ_n i ϵ_{ox}), parametara tehnološkog procesa (t_{ox} i V_t), geometrijskih dimenzija tranzistora (W i L) i primenjenih napona v_{GS} i v_{DS} .

Oblast rada NMOS tranzistora u režimu malih napona v_{DS} naziva se *linearna oblast* (jer se MOS tranzistor ponaša kao otpornik) ili *triodna oblast* (po sličnosti karakteristika sa davno korišćenom elektronskom cevi triodom).

9.2.2 Ponašanje NMOS tranzistora pri većim naponima V_{DS}

Pri većim naponima v_{DS} , napon između gejta i sorsa neće biti približno jednak naponu između gejta i drejna. Zbog toga će se napon između gejta i kanala menjati od v_{GS} na strani sorsa do $v_{GS} - v_{DS}$ na strani drejna. Pošto dubina kanala zavisi od ovog napona, na strani sorsa kanal će prodirati dublje u podlogu, a na strani drejna kanal će biti plići. Sa porastom napona v_{DS} promena dubine kanala postaje sve veća. Kada se napon v_{DS} izjednači sa naponom $v_{GS} - V_t$ dubina kanala u okolini drejna se približno svede na nulu, odnosno kaže se da je kanal stisnut. Povećanjem vrednosti napona v_{DS} iznad $v_{GS} - V_t$ oblik kanala se skoro ne menja, tako da se struja drejna zaustavlja na nekoj vrednosti, odnosno, dolazi do zasićenja struje drejna.

Oblast rada NMOS tranzistora u režimu većih napona $v_{DS} > v_{GS} - V_t$ naziva se *oblast zasićenja*. Struja drejna režimu zasićenja se može se dobiti iz prethodne jednačine za struju ako što se izvrši smena $v_{DS} = v_{GS} - V_t$, čime se dobija:

$$i_D = \frac{\mu_n \epsilon_{ox}}{t_{ox}} \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)^2 = k_n \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)^2 \quad (9.2)$$

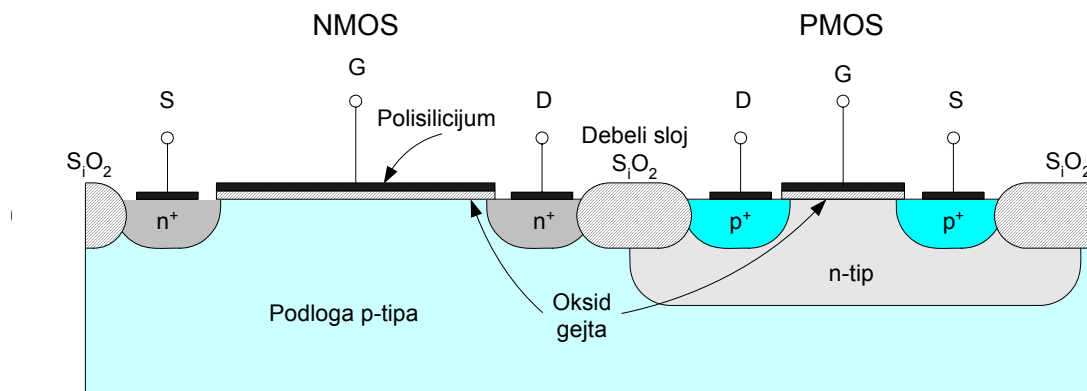
9.3 PMOS tranzistor i komplementarni MOS (CMOS)

MOS tranzistor sa p kanalom se pravi na podlozi n tipa sa p^+ oblastima za sors i drejn. Princip rada mu je potpuno isti kao kod NMOS tranzistora, jedino se polaritet svih napona i struja razlikuje. Dakle, naponi v_{GS} , v_{DS} i V_t su negativni, a struja drejna i_D ima smer prema sorsu i izlazi iz drejna. U izrazima za struju umesto pokretljivosti elektrona μ_n figuriše pokretljivost šupljina μ_p .

Tehnologija izrade PMOS tranzistora je starija od tehnologije izrade NMOS tranzistora i nekada je bila dominantna. Međutim, danas su dominantni NMOS tranzistori. Razlog za to su njihove bolje karakteristike. Pošto je pokretljivost elektrona μ_n oko 2.5 puta veća od pokretljivosti šupljina, struja NMOS tranzistora je oko 2.5 veća pri istim uslovima od struje istog PMOS tranzistora. Zbog toga NMOS tranzistori mogu biti manji i raditi sa manjim naponima napajanja. Pa ipak, PMOS tranzistori se još uvek koriste kao diskretni tranzistori, a u integrisanim kolima u okviru komplementarnih MOS ili CMOS kola.

Komplementarna MOS ili CMOS kola sadrže tranzistore oba tipa. Iako su komplikovanija za proizvodnju od NMOS kola, CMOS kola su najkorisnija savremena MOS kola i koriste se u realizaciji i digitalnih i analognih kola.

Poprečni presek kroz jedno CMOS kolo je prikazan na slici 9.3. NMOS tranzistor se realizuje direktno na podlozi p tipa, dok se PMOS tranzistor realizuje u posebno napravljenoj n oblasti, koja predstavlja njegovu podlogu. Oba tranzistora su međusobno izolovana debelim slojem oksida.



Slika 9.3: Struktura CMOS kola.

9.4 Model NMOS tranzistora za velike signale

Kao što je objašnjeno u prethodnim odeljcima, zavisno od napona na elektrodama MOS tranzistor se može naći u tri režima rada: zakočenju, triodnoj oblasti i zasićenju. U ovom odeljku će malo detaljnije biti razmatrani uslovi rada u sve tri pobrojane oblasti i biće izvedeni odgovarajući ekvivalentni električni modeli NMOS tranzistora za velike signale.

9.4.1 NMOS tranzistor u zakočenju

NMOS tranzistor je zakočen kada nema uslova za formiranje kanala. Dakle, da bi tranzistor bio zakočen, treba da bude $v_{GS} < V_t$. Tada između drejna i sorsa, umesto kanala, postoje dve diode od kojih je uvek jedna inverzno polarisana. Pošto je otpornost između sorsa i drejna reda $10^{12} \Omega$, a gejt je izolovan, može se smatrati da se ceo MOS tranzistor može zameniti prekinutim vezama.

9.4.2 NMOS tranzistor u triodnoj oblasti

Kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS} \geq V_t$, a napon između sorsa i drejna dovoljno mali, $v_{DS} \leq v_{GS} - V_t$, NMOS tranzistor radi u triodnoj oblasti. U jednačini za struju drejna:

$$i_D = k_n \frac{W}{L} [2(v_{GS} - V_t)v_{DS} - v_{DS}^2] \quad (9.3)$$

se za male napone v_{DS} može zanemariti kvadratni član, čime se ona svodi na oblik:

$$i_D \approx 2k_n \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)v_{DS} \quad (9.4)$$

Dakle, u triodnoj oblasti se NMOS tranzistor ponaša kao otpornik, čija vrednost zavisi od kontrolnog napona v_{GS} :

$$r_{DS} = \frac{v_{DS}}{i_D} = \frac{1}{2k_n \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)} \quad (9.5)$$

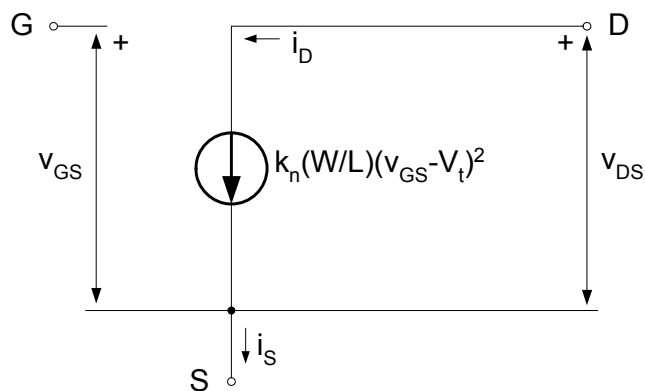
Ova osobina MOS tranzistora se često koristi u elektronskim kolima za realizaciju programabilnih naponski kontrolisanih otpornika.

9.4.3 NMOS tranzistor u zasićenju

Kada je napon na gejtu dovoljno veliki za formiranje kanala, $v_{GS} \geq V_t$, a napon između sorsa i drejna dovoljno veliki, $v_{DS} \geq v_{GS} - V_t$, NMOS tranzistor radi u oblasti zasićenja. Jednačina za struju drejna:

$$i_D = k_n \frac{W}{L} (v_{GS} - V_t)^2 \quad (9.6)$$

pokazuje da se NMOS tranzistor u oblasti zasićenja može predstaviti kao idealni zavisni strujni izvor kontrolisan naponom v_{GS} , što je pokazano na slici 9.4.



Slika 9.4: Ekvivalentni model NMOS tranzistora za velike signale u oblasti zasićenja.

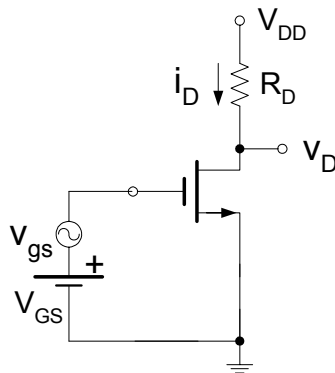
9.5 Model NMOS tranzistora za male signale

Kao i kod bipolarnog tranzistora, model MOS tranzistora se može dobiti korišćenjem pretpostavke da se pobudni signal može razložiti na dve komponente: konstantnu, koja određuje radnu tačku, i promenljivu, koja predstavlja signal koji treba pojačati. Svi naponi i struje u kolu se onda mogu razložiti na konstantne i promenljive komponente. Sa konstantnim komponentama se operiše korišćenjem modela za velike signale, a za određivanje promenljivih komponenata se koristi model za male signale.

Da bi se NMOS tranzistor koristio kao pojačavač, njegova radna tačka mora biti u oblasti zasićenja. Dakle, za određivanje radne tačke tranzistora u kolu sa slike 9.5 može se pretpostaviti da je promenljivi signal jednak nuli, $v_{gs} = 0$, i napisati sistem jednačina za jednosmerni režim:

$$I_D = k_n \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t)^2 \quad (9.7)$$

$$V_D = V_{DD} - R_D I_D \quad (9.8)$$



Slika 9.5: Osnovno pojačavačko kolo sa NMOS tranzistorom.

Zatim se pretpostavi da postoji i promenljivi signal v_{gs} , odnosno da je ukupna pobuda:

$$v_{GS} = V_{GS} + v_{gs} \quad (9.9)$$

koja daje ukupnu struju drejna:

$$i_D = k_n \frac{W}{L} (V_{GS} + v_{gs} - V_t)^2 = k_n \frac{W}{L} [(V_{GS} - V_t)^2 + 2(V_{GS} - V_t)v_{gs} + v_{gs}^2] \quad (9.10)$$

Prvi član u ovoj jednačini odgovara konstantnoj struji drejna u radnoj tački. Drugi član predstavlja komponentu struje koja je direktno proporcionalna promenljivoj delu pobudnog napona, i koji je koristan sa gledišta pojačanja. Treći član je srazmeran kvadratu promenljivog dela pobudnog napona i predstavlja nepoželjan efekat, tzv. nelinearna izobličenja. Da bi se nelinearna izobličenja smanjila, potrebno je da promenljivi pobudni signal bude dovoljno mali:

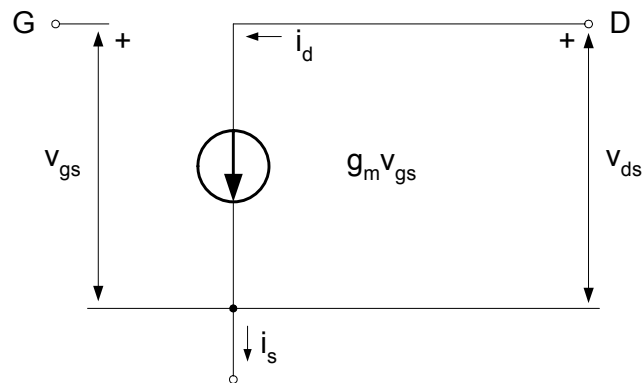
$$v_{gs} \ll 2(V_{GS} - V_t) \quad (9.11)$$

i tada se ukupna struja drejna može napisati u obliku:

$$i_D \approx I_D + i_d = k_n \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t)^2 + 2k_n \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t)v_{gs} \quad (9.12)$$

Dakle, NMOS tranzistor se za male signale može modelovati idealnim strujnim izvorom zavisnim od napona, što je prikazano na slici 9.6. Parametar g_m , koji povezuje signale i_d i v_{gs} , naziva se *transkonduktansa MOSFET-a* i definisan je izrazom:

$$g_m = \frac{i_d}{v_{gs}} = 2k_n \frac{W}{L} (V_{GS} - V_t) = \frac{2I_D}{V_{GS} - V_t} \quad (9.13)$$



Slika 9.6: Ekvivalentni model NMOS tranzistora za male signale.

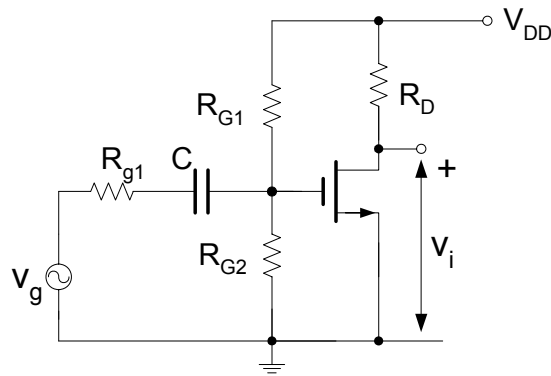
Interesantno je primetiti da su modeli za male signale bipolarnog tranzistora i NMOS tranzistora slični. Jedna od razlika je što u modelu bipolarnog tranzistora u ulaznom delu kola figuriše otpornost r_π , koje nema u modelu MOS tranzistora. Zbog toga će ulazna otpornost kola sa MOS tranzistorom, gledano sa strane gejta, uvek biti mnogo veća nego kod kola sa bipolarnim tranzistorom. Druga razlika se odnosi na vrednost transkonduktanse g_m , koja je pri istoj struji mnogo veća kod bipolarnog tranzistora. Na primer, ako je $I_D = 1 \text{ mA}$, $V_{GS} - V_t = 1 \text{ V}$, onda je za bipolarni tranzistor $g_m \approx 40 \text{ mA/V}$, a za NMOS tranzistor $g_m \approx 2 \text{ mA/V}$.

9.6 Osnovna pojačavačka kola sa NMOS tranzistorom

Kao i kod bipolarnog tranzistora, promenljivi ulazni signal uvek mora dovesti između elektroda gejta i sorsa, a izlaz se može uzeti bilo sa drejna bilo sa sorsa. Zavisno od toga koja je od elektroda MOS tranzistora na konstantnom potencijalu, razlikuju se tri osnovne konfiguracije: *pojačavač sa zajedničkim sorsom*, *pojačavač sa zajedničkim drejnom* i *pojačavač sa zajedničkim gejtom*.

9.6.1 Pojačavač sa zajedničkim sorsom

Pojačavač sa zajedničkim (uzemljenim) sorsom je najčešće i najkorisnije kolo sa jednim MOS tranzistorom, koje je prikazano na slici 9.7. Vidi se da je pobuda priključena između gejta i sorsa (mase), a da se izlazni napon uzima između drejna i sorsa (mase).



Slika 9.7: Pojačavač sa zajedničkim sorsom.

Otpornici R_{G1} i R_{G2} služe za podešavanje radne tačke, odnosno napona V_{GS} i struje I_D . Pošto nema struje gejta, razdelnik napona je neopterećen, tako da ovi otpornici mogu imati znatno veće vrednosti nego kod pojačavača sa bipolarnim tranzistorom, što povećava ulaznu otpornost.

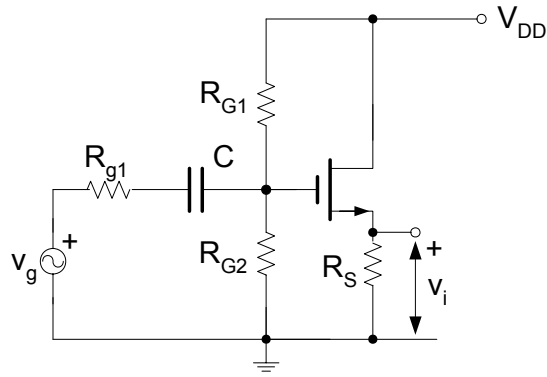
Zamenom MOS tranzistora modelom za male signale, posle kraćeg izračunavanja, za naponsko pojačanje dobija se:

$$A_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{-g_m v_{gs} R_D}{v_g} = -g_m R_D \frac{R_G}{R_{g1} + R_G} \approx -g_m R_D \quad (9.14)$$

gde je $R_G = R_{G1} \parallel R_{G2}$. Dakle, pojačavač sa zajedničkim sorsom ima veliko naponsko pojačanje i obrće fazu.

9.6.2 Pojačavač sa zajedničkim drejnom

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) drejnom, koji je prikazan na slici 9.8, drejn je vezan direktno na bateriju za napajanje, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između gejta i drejna (mase), a izlazni napon se uzima između sorsa i drejna (mase).



Slika 9.8: Pojačavač sa zajedničkim drejnom.

Posle zamene MOS tranzistora modelom za male signale i kraćeg izračunavanja dobija se izraz za naponsko pojačanje:

$$A_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{R_G}{R_{g1} + R_G} \frac{g_m R_S}{1 + g_m R_S} \approx 1 \quad (9.15)$$

gde je $R_G = R_{G1} \parallel R_{G2}$. Dakle, pojačavač sa zajedničkim drejnom ima jedinično naponsko pojačanje i ne obrće fazu.

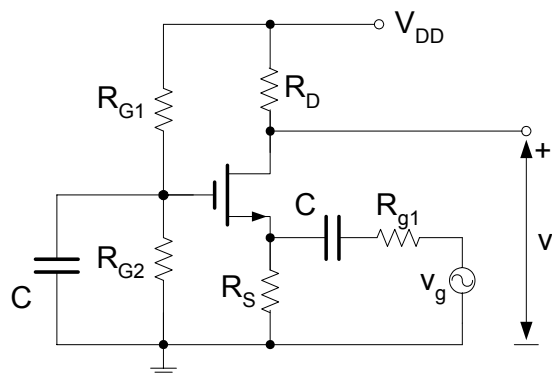
Za izlaznu otpornost pojačavača sa zajedničkim drejnom se lako dobija:

$$R_i = \frac{R_S}{1 + g_m R_S} \quad (9.16)$$

odnosno, *izlazna otpornost pojačavača sa zajedničkim drejnom je vrlo mala.*

9.6.3 Pojačavač sa zajedničkim gejtom

Kod pojačavača sa zajedničkim (uzemljenim) gejtom, koji je prikazan na slici 9.9, gejt je vezan na konstantan napon iz razdelnika napona, odnosno vezan je na masu za promenljivi signal. Pobuda je priključena između sorsa i gejta (mase), a izlazni napon se uzima između drejna i gejta (mase).



Slika 9.9: Pojačavač sa zajedničkim gejtom.

Posle zamene MOS tranzistora modelom za male signale i kraćeg izračunavanja dobija se izraz za naponsko pojačanje:

$$A_v = \frac{v_i}{v_g} = \frac{g_m R_D}{1 + g_m R_G} \quad (9.17)$$

gde je $R_G = R_{g1} \parallel R_S$. Dakle, *pojačavač sa zajedničkim drejnom ima naponsko pojačanje veće od jedinice i ne obrće fazu.*

10. Složena pojačavačka kola

Ako posmatramo pojačavač sa zajedničkim sorsom vidimo da je njegovo naponsko pojačanje znatno manje od pojačanja pojačavača sa zajedničkim emitorom. To je posledica činjenice da je transkonduktansa MOS tranzistora znatno manja od transkonduktanse bipolarnog tranzistora. Da bi se povećalo naponsko pojačanje, trebalo bi povećati vrednost otpornika R_D . Međutim, ako napon napajanja ostane isti, povećanje otpornosti R_D izazvaće smanjenje struje I_D i smanjenje transkonduktanse g_m . Dakle, pojačanje će se samo malo povećati sa povećanjem otpornosti R_D . Slična je situacija i kod pojačavača sa zajedničkim emitorom, ali se kod njega ipak može realizovati nešto veće pojačanje.

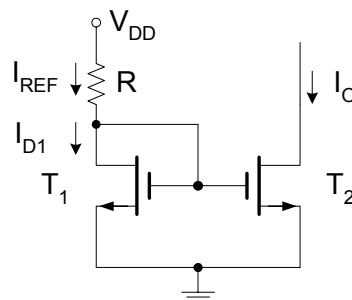
Postoji još jedan nedostatak opisanih pojačavača sa MOS tranzistorima kada se pojačavačka kola realizuju u tehnologiji integrisanih kola. Dimenzije integrisanih otpornike su nekoliko puta, pa čak i nekoliko desetina puta, veće od dimenzija MOS tranzistora. Prema tome, upotreba otpornika smanjuje broj komponentata koje se mogu realizovati na zadatoj površini.

Treći nedostatak svih opisanih konfiguracija sa jednim tranzistorom je što se koriste kondenzatori za spregu sa pobudnim izvorom kao i sa narednim pojačavačkim stepenom. Oni su neophodni da se ne bi poremetila radna tačka tranzistora priključivanjem pobude ili narednog stepena. Takvi kondenzatori treba da budu velike kapacitivnosti da ne bi slabili signale na niskim učestanostima. U realizacijama sa diskretnim komponentama, ovi kondenzatori ne predstavljaju problem. Međutim, u integrisanoj tehnologiji nije moguće realizovati kondenzatore velikog kapaciteta na silicijumskoj pločici, pa se mora tražiti neko alternativno rešenje.

Navedeni razlozi doveli su do razvoja novih kola, koja treba da imaju veliko pojačanje uz istovremeno malo zauzeće površine integrisanih kola. Takva kola sadrže samo MOS tranzistore i dominantna su u savremenoj tehnologiji MOS integrisanih kola. Osnovna ideja je da se otpornik zameni sa strukturom koja sadrži jedan ili više tranzistora. Takva struktura treba da obezbedi veliku dinamičku otpornost, uz istovremeno zadržavanje radne tačke pojačavačkog tranzistora.

10.1 Strujni izvori

Realizacije pojačavača u integrisanoj tehnologiji intenzivno koriste strujne izvore. Jedna jednostavna realizacija strujnog izvora je pokazana na slici 10.1.



Slika 10.1: Strujni izvor sa NMOS tranzistorima.

Pošto je kod tranzistora T_1 drejn spojen sa gejtom, tranzistor T_1 mora biti u režimu zasićenja, jer je $v_{DS} = v_{GS} > v_{GS} - V_t$. Struja kroz tranzistor T_1 (referentna struja) iznosi:

$$I_{D1} = k_n \left(\frac{W_1}{L_1} \right) (V_{GS} - V_t)^2 = I_{REF} = \frac{V_{DD} - V_D}{R} \quad (10.1)$$

Pošto tranzistori T_1 i T_2 imaju isti napon V_{GS} , izborom radne tačke tranzistora T_2 u zasićenju, dobija se jednačina za izlaznu struju:

$$I_O = I_{D2} = k_n \left(\frac{W_2}{L_2} \right) (V_{GS} - V_t)^2 \quad (10.2)$$

Kombinacijom prethodne dve jednačine, konačno se dobija:

$$\frac{I_O}{I_{REF}} = \frac{W_2/L_2}{W_1/L_1} \quad (10.3)$$

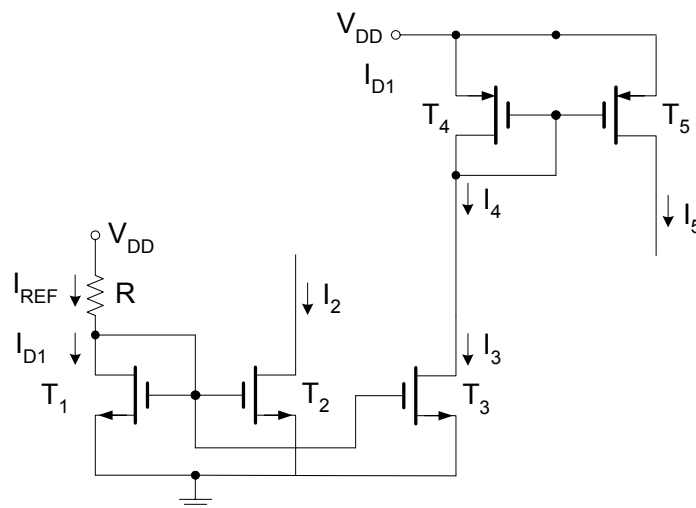
Odnos I_O/I_{REF} se naziva *strujno pojačanje strujnog izvora*.

Dakle, izborom referentne struje I_{REF} i postavljanjem radne tačke prvog tranzistora da obezbedi tu struju, može se obezbediti željena izlazna struja podešavanjem geometrijskih dimenzija oba tranzistora. Ako su tranzistori identični, onda je $I_O = I_{REF}$, pa je ovakvo kolo dobilo naziv *strujno ogledalo*.

Da bi se opisano kolo ponašalo kao strujni izvor, neophodno je da tranzistor T_2 radi u zasićenju, čime je obezbeđena velika izlazna otpornost. Dakle, kolo na koje se priključuje strujni izvor mora obezbediti minimalni napon na drejnu drugog tranzistora:

$$V_{D2} \geq V_{GS} - V_t \quad (10.4)$$

Na jedan referentni tranzistor T_1 se može vezati više različitih tranzistora T_1, T_2, \dots , čime se može dobiti više različitih konstantnih struja u istom kolu. Takođe, upotrebom PMOS tranzistora, može se ostvariti izlazna struja suprotnog smera. Oba ova principa su ilustrovana na slici 10.2.



Slika 10.2: Strujni izvori sa NMOS i PMOS tranzistorima.

Za kolo na slici 10.2 lako se mogu napisati jednačine:

$$I_2 = I_{REF} \frac{W_2/L_2}{W_1/L_1} \quad (10.5)$$

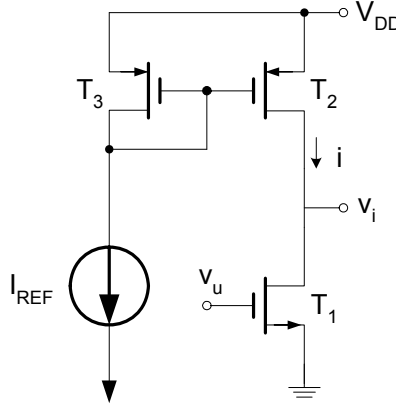
$$I_3 = I_{REF} \frac{W_3/L_3}{W_1/L_1} = I_4 \quad (10.6)$$

$$I_5 = I_4 \frac{W_5/L_5}{W_4/L_4} = I_{REF} \frac{W_3/L_3}{W_1/L_1} \frac{W_5/L_5}{W_4/L_4} \quad (10.7)$$

koje daju odnose struja strujnih izvora i referentne struje.

10.2 Pojačavač sa dinamičkim opterećenjem

Strujni izvori, opisani u prethodnom odeljku, se mogu korisno upotrebiti za realizaciju pojačavača sa većim pojačanjem nego što se može ostvariti konfiguracijama sa otpornim opterećenjem. Naime, strujni izvori daju konstantnu jednosmernu struju, kojom se može podesiti pogodna radna tačka pojačavačkog tranzistora. S druge strane, strujni izvori imaju veliku (teorijski beskonačnu) izlaznu otpornost, čime simuliraju veliko opterećenje pojačavačkog tranzistora. Ako je pojačavački tranzistor NMOS tipa onda strujni izvor, koji treba da zameni otpornik u kolu drejna, mora da odaje struju i mora biti realizovan sa PMOS tranzistorima. Kompletna šema pojačavača sa zajedničkim sorsom i strujnim izvorom kao dinamičkim opterećenjem je prikazana na slici 10.3.



Slika 10.3: Pojačavač sa zajedničkim sorsom u CMOS tehnologiji.

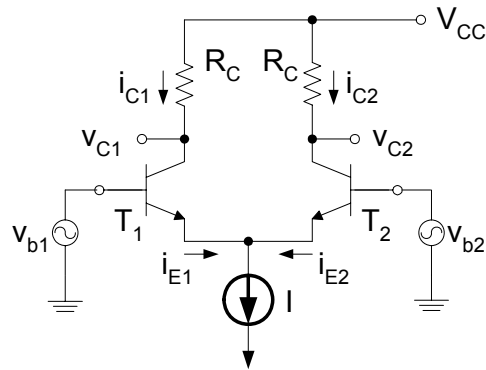
Ako za naponsko pojačanje koristimo najprostiji izraz $A_v \approx -g_m R_D$ onda se dobija da je naponsko pojačanje beskonačno veliko jer $R_D \rightarrow \infty$. Naravno, to je posledica korišćenja jako uprošćenog modela MOS tranzistora za male signale. Ako se koristi složeniji model MOS tranzistora, koji u sebi sadrži izlaznu otpornost tranzistora r_{DS} , paralelno vezanu sa zavisnim strujnim izvorom, onda se za naponsko pojačanje pojačavača sa zajedničkim sorsom sa slike 10.3 dobija tačniji izraz:

$$A_v \approx -g_{m1} (r_{DS1} \parallel r_{DS2}) \approx -\sqrt{k_n \frac{W_1}{L_1}} \frac{V_A}{\sqrt{I_{REF}}} \quad (10.8)$$

gde je V_A napon koji određuje nagib (teorijski horizontalne) krive $i_D = f(v_{DS})$. Pošto su tipične vrednosti napona V_A negde između 30 V i 200 V, ovakvim kolom sa aktivnim opterećenjem se može ostvariti naponsko pojačanje od 20 do 100 puta. Kao što se vidi, naponsko pojačanje se znatno povećava ako se upotrebi konfiguracija sa dinamičkim opterećenjem pojačavačkog tranzistora koje se realizuje pomoću strujnog izvora. Isti princip se može iskoristiti i za povećanje pojačanja konfiguracija sa zajedničkim gejtom ili drejnom.

10.3 Diferencijalni pojačavač

Diferencijalni pojačavač je jedno od najkorisnijih pojačavačkih kola. U osnovnoj verziji se sastoji od dva tranzistora (bipolarna ili MOS), dva otpornika i strujnog izvora. U složenijim verzijama, sa boljim karakteristikama, otpornici su zamenjeni strujnim izvorima. Osnovno kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima je prikazano na slici 10.4.



Slika 10.4: Osnovno kolo diferencijalnog pojačavača sa bipolarnim tranzistorima.

Za kolo na slici 10.4 se mogu napisati jednačine za emitorske struje oba tranzistora:

$$i_{E1} = I_{ES} e^{(v_{B1} - v_E)/V_T} \quad (10.9)$$

$$i_{E2} = I_{ES} e^{(v_{B2} - v_E)/V_T} \quad (10.10)$$

iz kojih se lako dobijaju njihov odnos i zbir:

$$\frac{i_{E1}}{i_{E2}} = e^{(v_{B1} - v_{B2})/V_T} \quad (10.11)$$

$$i_{E1} + i_{E2} = I \quad (10.12)$$

odakle sledi:

$$i_{E1} = \frac{I}{1 + e^{(v_{B2} - v_{B1})/V_T}} \quad (10.13)$$

$$i_{E2} = \frac{I}{1 + e^{(v_{B1} - v_{B2})/V_T}} \quad (10.14)$$

Pojačanje diferencijalnog pojačavača za male signale se dobija kada se na kolo primeni mali diferencijalni napon $v_d = v_{B1} - v_{B2}$. Onda se za kolektorske struje oba tranzistora dobija:

$$i_{C1} = \frac{\alpha I}{1 + e^{-v_d/V_T}} = \frac{\alpha I e^{v_d/2V_T}}{e^{v_d/2V_T} + e^{-v_d/2V_T}} \approx \frac{\alpha I (1 + v_d/2V_T)}{(1 + v_d/2V_T) + (1 - v_d/2V_T)} = \frac{\alpha I}{2} + \frac{\alpha I}{2V_T} \frac{v_d}{2} = I_C + g_m \frac{v_d}{2} \quad (10.15)$$

$$i_{C2} = \frac{\alpha I}{1 + e^{v_d/V_T}} = \frac{\alpha I}{2} - \frac{\alpha I}{2V_T} \frac{v_d}{2} = I_C - g_m \frac{v_d}{2} \quad (10.16)$$

pa su naponi na kolektorima tranzistora:

$$v_{C1} = (V_{CC} - R_C I_C) - g_m R_C \frac{v_d}{2} = V_{C1} + v_{c1} \quad (10.17)$$

$$v_{C2} = (V_{CC} - R_C I_C) + g_m R_C \frac{v_d}{2} = V_{C2} + v_{c2} \quad (10.18)$$

Za diferencijalni pojačavač se mogu definisati dve vrste pojačanja. Jedno je *diferencijalno pojačanje*, čiji je definicioni izraz:

$$A_d = \frac{v_{c1} - v_{c2}}{v_d} \approx -g_m R_C \quad (10.19)$$

a drugo je *pojačanje srednje vrednosti* definisano izrazom:

$$A_{CM} = \frac{v_{C1} - v_{C2}}{\frac{v_{B1} + v_{B2}}{2}} \approx 0 \quad (10.20)$$

u slučaju kada je kolo potpuno simetrično i naponi na ulazima jednaki. Ako postoji mala razlika između otpornika u kolu kolektora, pojačanje srednje vrednosti biće različito od nule:

$$A_{CM} \approx \frac{\Delta R_C}{2R} = \frac{R_C}{2R} \frac{\Delta R_C}{R_C} \quad (10.21)$$

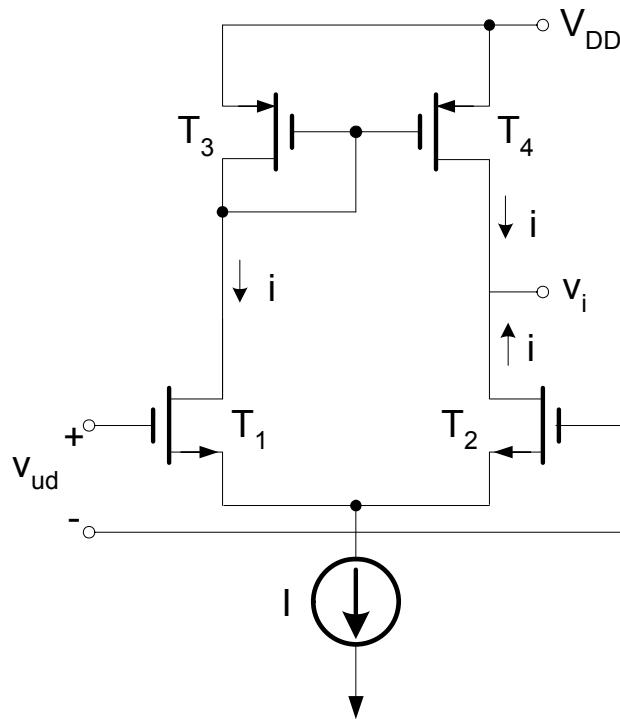
gde je R izlazna otpornost strujnog izvora koja je vrlo velika. Zato je pojačanje srednje vrednosti uvek malo.

U opštem slučaju je:

$$v_i = A_d (v_{B1} - v_{B2}) + A_{CM} \left(\frac{v_{B1} + v_{B2}}{2} \right) \quad (10.22)$$

Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima bi se mogao realizovati na isti način kao na slici 10.4 zamenom bipolarnih tranzistora NMOS tranzistorima. Međutim, zbog toga što otpornici u kolu drejna ne smeju da budu veliki zbog obezbeđenja dovoljne jednosmerne struje drejna, kao i zbog toga što je transkonduktansa MOS tranzistora znatno manja od transkonduktanse bipolarnih tranzistora, pojačanje takvog diferencijalnog pojačavača bilo bi suviše malo, a njegova realizacija u integrisanoj tehnici neefikasna zbog korišćenja otpornika.

Zato se u integriranoj tehnici uvek primenjuje nešto složenija realizacija diferencijalnog pojačavača sa strujnim izvorima kao dinamičkim opterećenjem pojačavačkih tranzistora, koja je prikazana na slici 10.5.



Slika 10.5: Diferencijalni pojačavač sa MOS tranzistorima.

Rad kola diferencijalnog pojačavača sa MOS tranzistorima može se u potpunosti objasniti analogijama sa kolom sa bipolarnim tranzistorima. Promenljivi deo izlazne struje dat je izrazom:

$$i = g_m \frac{v_d}{2} \quad (10.23)$$

Pošto je za svaki tranzistor struja u radnoj tački:

$$I_D = \frac{I}{2} \quad (10.24)$$

onda je:

$$g_m = \frac{I}{V_{GS} - V_t} \quad (10.25)$$

pa je izlazni napon dat izrazom:

$$v_i = 2i(r_{DS2} \parallel r_{DS4}) \quad (10.26)$$

Ako je:

$$r_{DS2} = r_{DS4} = r_o = \frac{V_A}{I/2} \quad (10.27)$$

izlazni napon postaje:

$$v_i = 2i \frac{r_o}{2} = ir_o = g_m \frac{v_{ud}}{2} r_o \quad (10.28)$$

pa je naponsko pojačanje:

$$A_v = \frac{v_i}{v_{ud}} = g_m \frac{r_o}{2} = \frac{V_A}{V_{GS} - V_t} \quad (10.29)$$

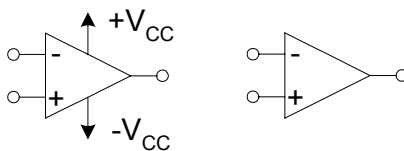
Sa savremenim MOS tranzistorima se može postići naponsko pojačanje od 20 do 100. Još veće pojačanje se može dobiti ako se umesto prostog strujnog izvora za dinamičko opterećenje upotrebe složeniji strujni izvori koji imaju veću dinamičku otpornost.

10.4 Operacioni pojačavač

Radi povećanja naponskog pojačanja, često se pojačavački stepeni povezuju na red ili u kaskadu. Naponsko pojačanja takvog pojačavača je proizvod naponskih pojačanja pojedinačnih stepeni i može biti vrlo veliko. U elektronici se takav pojačavač, koji ima veliko naponsko pojačanje, naziva *operacioni pojačavač*. Naziv je dobio po tome što je primenom takvog pojačavača moguće realizovati neke matematičke operacije između ulaznih napona.

Dakle, operacioni pojačavač ima veliko naponsko pojačanje. U praksi se često, zbog jednostavnijeg računa, koristi pojam *idealnog operacionog pojačavača*. Takav pojačavač ima beskonačno veliko naponsko pojačanje, $A_v \rightarrow \infty$, beskonačno veliku ulaznu otpornost, $R_u \rightarrow \infty$, i beskonačno malu izlaznu otpornost, $R_i \rightarrow 0$. Operacioni pojačavač najčešće ima diferencijalni ulaz, jer je prvi pojačavački stepen diferencijalni pojačavač.

Simboli kojima se u električnim šemama predstavlja operacioni pojačavač prikazani su na slici 10.6.



Slika 10.6: Simboli operacionog pojačavača.

Idealni operacioni pojačavač ima jednu interesantnu osobinu. S obzirom da na njegovom izlazu mora postojati konačan napon, a da mu je naponsko pojačanje beskonačno veliko, napon između ulaznih krajeva mora biti jednak nuli. Dakle, *napon između ulaznih priključaka je jednak nuli ali između njih ne teče nikakva struja*. Ako je jedan od ulaznih priključaka vezan na masu, potencijal drugog ulaznog priključka je takođe nula, pa se kaže da je on na *virtuelnoj masi*.

10.5 Primene operacionog pojačavača

Operacioni pojačavač ima brojne primene i predstavlja najčešće korišćeni sklop savremene analogne elektronike. Primenom operacionog pojačavača se mogu realizovati pojačavači precizno određenog pojačanja, kola za realizaciju nekih aritmetičkih operacija, kola za integraljenje i diferenciranje, itd. Najčešće korišćena kola biće prikazana u narednom izlaganju.

10.5.1 Invertorski pojačavač

Posmatrajmo kolo sa slike 10.6. S obzirom da je invertorski priključak na virtuelnoj masi, struja kroz otpornik R_1 je:

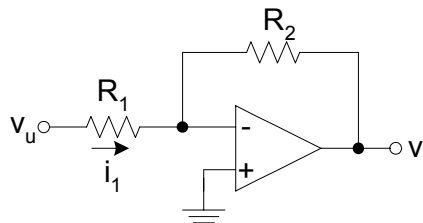
$$i_1 = \frac{v_u}{R_1} \quad (10.30)$$

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, struja i_1 u celini protiče kroz otpornik R_2 i daje izlazni napon:

$$v_i = -R_2 i_1 = -\frac{R_2}{R_1} v_u \quad (10.31)$$

Naponsko pojačanje je onda:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (10.32)$$

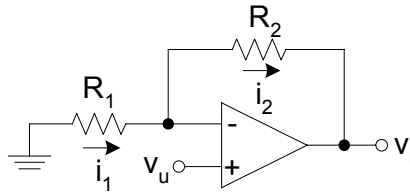


Slika 10.6: Invertorski pojačavač.

Kao što se vidi, naponsko pojačanje je negativno i određeno je odnosom dve otpornosti. Zbog toga se naponsko pojačanje može veoma precizno realizovati jer ne zavisi od karakteristika upotrebljenih aktivnih komponenata. Zbog toga što je naponsko pojačanje negativno, izlazni napon će predstavljati pojačanu i invertovanu sliku ulaznog napona, pa se ovo kolo naziva *invertorski pojačavač*. Ako je pobuda sinusoidalna, napon na izlazu biće pojačan sinusoidalni napon koji je fazno pomeren za 180° .

10.5.2 Neinvertorski pojačavač

Pojačavač čije je pojačanje pozitivno, ili *neinvertorski pojačavač*, može se realizovati kolom sa slike 10.7.



Slika 10.7: Neinvertorski pojačavač.

S obzirom da je napon između ulaznih priključaka jednak nuli, napon na invertorskom priključku takođe će biti jednak ulaznom naponu, pa je struja kroz otpornik R_1 :

$$i_1 = \frac{v_u}{R_1} \quad (10.33)$$

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, struja i_1 u celini protiče kroz otpornik R_2 i daje izlazni napon:

$$i_2 = \frac{v_i - v_u}{R_2} = i_1 = \frac{v_u}{R_1} \quad (10.34)$$

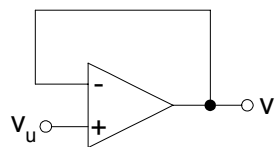
odakle se lako za naponsko pojačanje dobija:

$$A_v = \frac{v_i}{v_u} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (10.35)$$

Dakle, naponsko pojačanje je pozitivno i veće od jedinice. U slučaju sinusoidalne pobude, ovaj pojačavač ne obrće fazu.

10.5.3 Jedinični pojačavač

Jedinični pojačavač je specijalni slučaj neinvertorskog pojačavača. Ako je $R_2 \ll R_1$, onda je naponsko pojačanje blisko jedinici. U graničnom slučaju $R_2 \rightarrow 0$ a $R_1 \rightarrow \infty$, pa se dobija kolo prikazano na slici 10.8 čije je naponsko pojačanje tačno jednako jedan. Jedinični pojačavač kolo ima najveću primenu kao razdvojni stepen, koji uz jedinično pojačanje obezbeđuje veliku ulaznu otpornost i malu izlaznu otpornost.



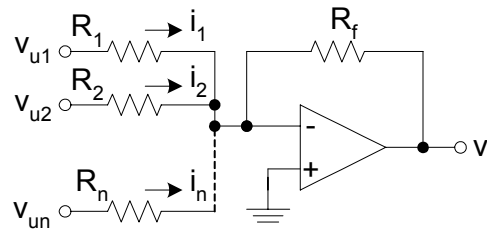
Slika 10.8: Jedinični pojačavač.

10.5.4 Kolo za sabiranje

Kolo za sabiranje je prikazano na slici 10.9. Ono se od invertorskog pojačavača razlikuje

samo po tome što ima više ulaza. Svaka od ulaznih struja data je istom jednačinom kao kod invertorskog pojačavača. Dakle, pošto je invertorski priključak na virtuelnoj masi, imamo:

$$i_k = \frac{v_{uk}}{R_k}, k = 1, 2, \dots, n \quad (10.36)$$



Slika 10.9: Kolo za sabiranje.

S obzirom da je ulazna struja pojačavača jednaka nuli, zbir struja i_k u celini protiče kroz otpornik R_f i daje izlazni napon:

$$v_i = -R_f \sum_{k=1}^n i_k = -R_f \sum_{k=1}^n \frac{v_{uk}}{R_k} \quad (10.37)$$

Ako su svi ulazni otpornici jednaki, $R_1 = R_2 = \dots = R_n = R$, onda se dobija uprošćeni izraz:

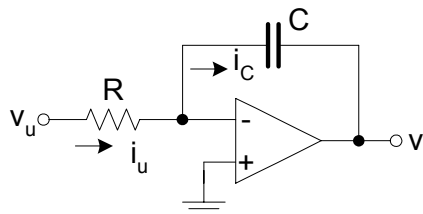
$$v_i = -R_f \sum_{k=1}^n \frac{v_{uk}}{R_k} = -\frac{R_f}{R} \sum_{k=1}^n v_{uk} \quad (10.38)$$

odnosno, izlazni napon je srazmeran zbiru ulaznih napona, po čemu je kolo dobilo ime.

10.5.5 Kolo za integraljenje

Kolo za integraljenje je prikazano na slici 10.10. Kao i kod invertujućeg pojačavača, ulazna struja je data izrazom:

$$i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \quad (10.39)$$



Slika 10.10: Integrator.

Ista struja protiče kroz kondenzator. S obzirom da su struja kroz kondenzator i napon na kondenzatoru povezani diferencijalnom relacijom:

$$i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} = i_u(t) = \frac{v_u(t)}{R} \quad (10.40)$$

za izlazni napon se dobija:

$$v_i(t) = -v_c(t) = v_i(t_0) - \frac{1}{RC} \int_{t_0}^t v_u(t) dt \quad (10.41)$$

gde je $v_i(t_0) = -v_c(t_0)$ početni napon na izlazu. S obzirom da je izlazni napon srazmeran integralu ulaznog napona, opisano kolo se naziva kolo za integraljenje, invertujući integrator, ili Milerov integrator.

Interesantno je posmatrati ponašanje invertujućeg integratora u slučaju naizmjenične pobude. Tada se može primeniti posmatranje kola u frekvencijskom domenu, odnosno fazorski račun. Fazor ulazne struje dat je izrazom:

$$I_u = \frac{V_u}{R} \quad (10.42)$$

a fazor izlaznog napona:

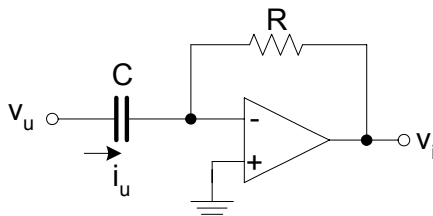
$$V_i = -V_c = -I_u \frac{1}{j\omega C} = -\frac{V_u}{j\omega RC} = j \frac{V_u}{\omega RC} \quad (10.43)$$

odnosno, kolo se ponaša kao idealni integrator i unosi fazni pomeraj od 90° .

10.5.6 Kolo za diferenciranje

Kolo za diferenciranje je prikazano na slici 10.11. Ulazna struja je data izrazom:

$$i_u(t) = C \frac{dv_u(t)}{dt} \quad (10.44)$$



Slika 10.11: Invertujući diferencijator.

Ista struja protiče kroz otpornik R , pa se za izlazni napon dobija:

$$v_i(t) = -Ri_u(t) = -RC \frac{dv_u(t)}{dt} \quad (10.45)$$

Dakle, izlazni napon je srazmeran prvom izvodu ulaznog napona, pa se ovo kolo naziva kolo za diferenciranje ili invertujući diferencijator

Isto kolo može se posmatrati i u frekvencijskom domenu ako je pobuda sinusoidalna. Fazor ulazne struje dat je izrazom:

$$I_u = \frac{V_u}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C V_u \quad (10.46)$$

a fazor izlaznog napona:

$$V_i = -V_R = -R I_u = -j\omega R C V_u \quad (10.47)$$

odnosno, kolo se ponaša kao idealni diferencijator i unosi fazni pomeraj od -90° .

11. Digitalna elektronska kola

Digitalna elektronska kola predstavljaju najčešće korišćena kola u savremenoj elektronici jer se koriste ne samo u računarima već i u uređajima za komunikacije, upravljanje, u instrumentaciji, pa i u uređajima za domaćinstvo. Na njihovu rasprostranjenost najviše je uticala mogućnost realizacije vrlo složenih kola u integrisanoj tehnologiji što je dovelo do velikog snižavanja cene uređaja. Za proteklih četrdeset godina, broj komponenata u jednom digitalnom integrisanom kolu se udvostručavao svake godine, tako da najsloženija savremena digitalna kola imaju nekoliko desetina miliona tranzistora. Istovremeno se povećavala i radna učestanost tranzistora, tako da najbrža savremena digitalna kola rade na taktu od nekoliko GHz. Ovaj trend povećanja broja komponenata u integrisanom kolu i povećanja radne učestanosti se nastavlja i sigurno će trajati narednih desetak godina. Da bi se mogao pratiti ovaj brzi razvoj, potrebno je imati osnovno razumevanje funkcionisanja kola savremene digitalne elektronike, bez obzira na to da li će se neko baviti samim projektovanjem kola ili projektovanjem složenih tehnoloških sistema. Zbog toga će u narednom izlaganju biti napravljen uvod u digitalna kola i njihovu primenu, sa posebnim naglaskom na MOSFET realizacije.

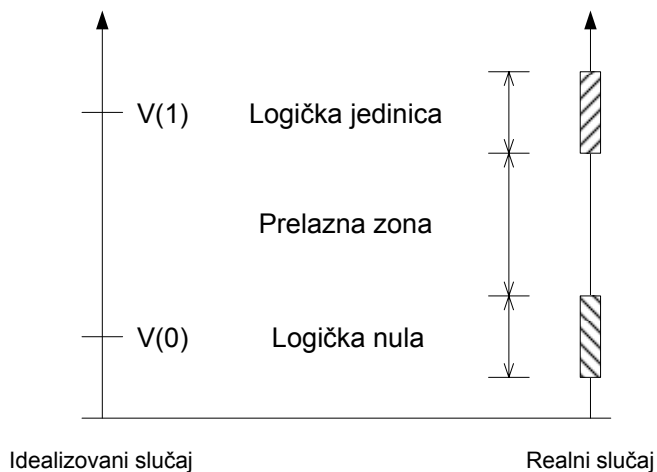
11.1 Analogni i digitalni signali i kola

Uobičajeni termin za signal koji je kontinualan u vremenu i po amplitudi je *analogni signal*. Kola koja operišu sa analognim električnim signalima kao što su pojačavači, sinusoidalni oscilatori, aktivni filtri, ... , su *analogna kola*.

Jednu važnu klasu analognih signala predstavljaju *impulsni signali*. Naime, brzina promene analognih signala teorijski nije ograničena. Impulsni signali imaju osobinu da se mogu naglo menjati. U idealnom slučaju ta promena može biti obavljena u beskonačno kratkom vremenskom intervalu. U praksi, brzina promene ograničena je brzinom prelaznih procesa kod komponenata kola. Dakle, impulsni signali su kontinualni u vremenu, ali im se amplituda može naglo menjati, pa signal u nekim slučajevima ne može imati bilo koju amplitudu iz dozvoljenog intervala. Primeri impulsnih signala su periodične ili aperiodične povorke pravougaonih, testerastih ili trougaonih impulsa, razne stepenaste funkcije, itd. Kola koja generišu ili obrađuju impulsne signale su *impulsna kola*. Najvažnije klase impulsnih kola su multivibratori (generatori impulsa i povorki impulsa), flipflopovi, komparatori, tajmeri, generatori linearnih napona i struja, itd.

Digitalni signali su jedna uža klasa impulsnih signala koji imaju mali broj dozvoljenih amplitudskih nivoa. Najčešće se koriste *binarni digitalni signali*, gde su definisana samo dva različita naponska nivoa. Šta više, zbog neizbežnih tolerancija komponenata i napona napajanja, obično se umesto naponskih nivoa definišu *naponski opsezi* koji se interpretiraju kao *logička jedinica* i *logička nula* kao na slici 11.1. Naponski opsezi koji definišu logičku nulu i logičku jedinicu razdvojeni su *prelaznom zonom* u kojoj se nalaze signali koji ne predstavljaju ni logičku nulu ni logičku jedinicu, pa prema tome nisu dozvoljeni u normalnom radu digitalnog kola.

Na slici 11.1 nivo (opseg) logičke jedinice viši je od nivoa logičke nule. Takav sistem se naziva *pozitivna logika*. Naravno, moguće je logičkom jedinicom označiti niži nivo, a logičkom nulom viši nivo, čime se dobija *negativna logika*. Danas je sistem pozitivne logike dominantan u praktičnoj upotrebi.



Slika 11.1 Definicija binarnih logičkih promenljivih.

Elektronska kola koja obrađuju binarne digitalne signale su *digitalna kola*. Ona su, kao i analogna kola, sastavljena od aktivnih elemenata (tranzistora) i pasivnih elemenata (otpornika i, vrlo retko, kondenzatora). Za razliku od analognih kola, koja se često izrađuju i u diskretnoj tehnologiji, digitalna kola se danas isključivo prave u tehnologiji integriranih kola. Treba reći da su digitalna kola korišćena dosta pre integrirane, pa i tranzistorske tehnologije. S obzirom da su osnove binarne, odnosno logičke algebre, postavljene još početkom prošlog veka, prvi električni elementi koji su korišćeni za realizaciju digitalnih kola bili su kontrolisani prekidači, ili relea. Sa pojavom elektronskih cevi napravljena su prva impulsna i digitalna kola, koja su omogućila veću brzinu rada. Prvi digitalni računar, napravljen početkom pedesetih godina, imao je sve digitalne elemente realizovane pomoću elektronskih cevi. Sa pojavom tranzistora digitalna kola se minijaturizuju i postaju brža. Glavni napredak u razvoju digitalnih kola došao je posle pronalaska tehnologije integriranih kola, koja je omogućila smanjenje dimenzija i cene, uz istovremeno povećanje brzine i kompleksnosti digitalnih kola.

Digitalna kola se prema načinu formiranja izlaznog signala dele na *kombinaciona* (logička) i *sekvencijalna* kola. Kod kombinacionih digitalnih kola signal na izlazu kola zavisi samo od trenutnih vrednosti ulaznih signala. Kod sekvencijalnih kola stanje na izlazu zavisi od trenutnog stanja na ulazima, ali i od prethodnih stanja na ulazima. Sekvencijalna kola se dalje dele na *sinhrona* i *asinhrona*. Kod sinhronih kola se sve promene dešavaju istovremeno pod dejstvom kontrolnog signala, *takta*. Kod asinhronih kola promene se mogu dešavati u proizvoljnom trenutku i određene su samo osobinama upotrebljenih elemenata i vremenom pojavljivanja pobude.

11.2 Logičke funkcije idealnih logičkih kola i Bulova algebra

U prethodnom poglavlju definisani su binarni digitalni signali koji su predstavljeni sa dva naponska, odnosno logička, nivoa. Nad takvim signalima mogu se izvoditi razne operacije koje se nazivaju *logičke operacije* ili *logičke funkcije*. Ovaj naziv potiče iz matematičke discipline koja se naziva *matematička logika*, a vodi poreklo još od grčkih filozofa koji su rezultate logičkog razmišljanja iskazivali sa dva iskaza: tačno i pogrešno. Kasnije, početkom 19. veka, engleski matematičar Džordž Bul matematički je formalizovao zakone logičkog rasuđivanja i uveo tzv. prekidačku ili Bulovu algebru. Iskazi tačno i pogrešno u Bulovoj algebri zamenjeni su zbog jednostavnosti prikazivanja sa logičkom nulom i logičkom jedinicom, odnosno, cifarskim simbolima 0 i 1.

U Bulovoj algebri definisane su tri osnovne operacije nad logičkim promenljivama. To su *I operacija* (engl. AND), koja se označava simbolom "·", *ILI operacija* (engl. OR), koja se označava simbolom "+" i *NE operacija* (engl. NOT) ili *komplementiranje*, koja se označava crticom iznad simbola promenljive "¬". I i ILI operacija se izvode nad najmanje dve promenljive, dok je NE operacija unarna, tj. izvodi se nad jednom promenljivom.

11.2.1 I operacija (logičko množenje)

Posmatrajmo prvo *I funkciju* dve logičke promenljive *A* i *B*. Rezultat I operacije najčešće se prikazuje u vidu tzv. *kombinacione tablice* ili *tablice istinitosti* koja je prikazana na sl. 11.2. Na istoj slici prikazan je i najčešće korišćeni grafički simbol za predstavljanje I operacije.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Y</i>
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



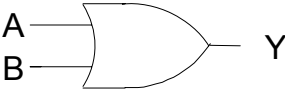
Slika 11.2 Kombinaciona tablica i grafički simbol za I operaciju.

Kao što se vidi, osnovna osobina I operacije nad dve promenljive je da se kao rezultat dobija logička jedinica, ako i samo ako obe promenljive imaju vrednost logičke jedinice. Zato se ponekad I operacija naziva i *logičko množenje* ili *konjunkcija*. Kolo koje realizuje I operaciju naziva se *I (AND) kolo*.

11.2.2 ILI operacija (logičko sabiranje)

ILI operacija nad dve logičke promenljive *A* i *B* prikazana je kombinacionom tablicom na sl. 11.3. Na istoj slici prikazan je i najčešće korišćeni grafički simbol za predstavljanje ILI operacije. Vidi se da se kao rezultat dobija logička jedinica ako bar jedna promenljiva ima vrednost logičke jedinice. Zato se ponekad ILI operacija naziva i *logičko sabiranje* ili *disjunkcija*. Kolo koje realizuje ILI operaciju naziva se *ILI (OR) kolo*.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>Y</i>
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

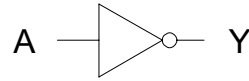


Slika 11.3 Kombinaciona tablica i grafički simbol za ILI operaciju.

11.2.3 NE operacija (komplementiranje)

Za razliku od I i ILI operacija, *NE operacija* se definiše nad jednom logičkom promenljivom ili izrazom. Kombinaciona tablica za NE operaciju i grafički simbol za predstavljanje kola koje obavlja NE operaciju prikazani su na sl. 11.4. Već je rečeno da se često NE operacija naziva i *komplementiranje* ili *negacija*. Kolo koje realizuje NE operaciju naziva se *NE kolo*, ili još češće, *invertor*.

A	Y
0	1
1	0



Slika 11.4 Kombinačna tablica i grafički simbol za NE operaciju.

11.2.4 Pravila Bulove algebre

Na osnovu definicionih relacija (postulata) za tri osnovne operacije, u Bulovoj algebri može se izvesti niz identiteta, zakona i teorema. Neki od tih identiteta, zakona i teorema su identični zakonima uobičajene linearne algebre, ali su neki različiti, pa čak i neuobičajeni. Primena identiteta, zakona i teorema najviše se ogleda u uprošćavanju složenih logičkih izraza, i u formiranju kola željene strukture.

11.2.4.1 Identiteti Bulove algebre

Identiteti Bulove algebre se vrlo često primenjuju u uprošćavanju logičkih funkcija. Identiteti se vrlo lako mogu dokazati korišćenjem definicionih kombinacionih tablica za tri osnovne operacije i formiranjem kombinacione tablice za levu i desnu stranu identiteta, ali je većina njih očigledna i ne treba ih dokazivati. Među identitetima najvažniji su:

1. Operacije sa logičkom nulom:

$$0 \cdot A = 0 \quad (11.1)$$

$$0 + A = A \quad (11.2)$$

2. Operacije sa logičkom jedinicom:

$$1 \cdot A = A \quad (11.3)$$

$$1 + A = 1 \quad (11.4)$$

3. Operacije sa istovetnim vrednostima:

$$A \cdot A = A \quad (11.5)$$

$$A + A = A \quad (11.6)$$

4. Operacije sa komplementiranim vrednostima:

$$A \cdot \bar{A} = 0 \quad (11.7)$$

$$A + \bar{A} = 1 \quad (11.8)$$

11.2.4.2 Zakoni Bulove algebre

Među zakonima Bulove algebre najvažniji su:

1. *Zakon komutacije:*

$$A + B = B + A \quad (11.9)$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (11.10)$$

2. *Zakon asocijacije:*

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (11.11)$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (11.12)$$

3. *Zakon distribucije:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (11.13)$$

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C) \quad (11.14)$$

4. *Zakon absorpcije:*

$$A + A \cdot B = A \quad (11.15)$$

$$A \cdot (A + B) = A \quad (11.16)$$

$$A + \bar{A} \cdot B = A + B \quad (11.17)$$

$$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B \quad (11.18)$$

$$(A \cdot B) + (A \cdot \bar{B}) = A \quad (11.19)$$

$$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A \quad (11.20)$$

Svi ovi zakoni mogu se lako dokazati direktnom primenom definicionih relacija za tri osnovne operacije, odnosno ispisivanjem kombinacionih tabela za obe strane jednakosti.

11.2.4.3 Teoreme Bulove algebre

Osim navedenih zakona vrlo važnu ulogu u Bulovoj algebri imaju tzv. *De Morganove teoreme*:

$$\overline{A + B} = \bar{A} \cdot \bar{B} \quad (11.21)$$

$$\overline{A \cdot B} = \bar{A} + \bar{B} \quad (11.22)$$

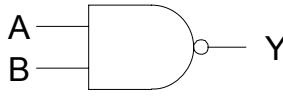
koje se lako mogu dokazati ispisivanjem kombinacionih tablica za leve i desne strane jednakosti.

Kombinacijom tri osnovne logičke operacije mogu se dobiti još neke vrlo važne i korisne logičke operacije. Kombinacijom I i NE operacije dobija se *NI* (engl. NAND) *operacija*, a kombinacijom ILI i NE operacije dobija se *NILI* (engl. NOR) *operacija*. Osim njih praktičnu primenu imaju još i operacija *isključivo-ILI* i *operacija koincidencije*.

11.2.5 NI operacija

Već je rečeno da se *NI operacija* dobija kombinacijom I i NE operacije. Prema tome, kombinaciona tablica za NI operaciju dobija se tako što se u kombinacionoj tablici za I operaciju sa sl. 11.2 komplementira izlazna kolona. Rezultat je prikazan na slici 11.5. Na istoj slici je prikazan i grafički simbol za NI operaciju koji je takođe kombinacija simbola za I i NE operaciju. Kolo koje realizuje NI operaciju naziva se *NI (NAND) kolo*.

A	B	Y
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



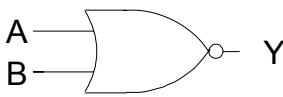
Slika 11.5 Kombinaciona tablica i grafički simbol za NI operaciju.

U Bulovoj algebri se može definisati tzv. *potpun skup operacija*. To je skup operacija pomoću kojih se može iskazati bilo koja logička funkcija. Pokazano je da takav potpun skup čine I i NE odnosno ILI i NE operacije. Dakle, NI operacija takođe čini potpun skup operacija, odnosno, proizvoljna logička funkcija se može izraziti samo pomoću NI operacije. Ova činjenica daje veliku važnost NI operaciji.

11.2.6 NILI operacija

NILI operacija dobijena je komplementiranjem rezultata ILI operacije. Kombinaciona tablica i grafički simbol za NILI operaciju prikazani su na slici 11.6. Treba reći da i NILI operacija predstavlja potpun skup za realizaciju logičkih funkcija. Kolo koje realizuje NILI operaciju naziva se *NILI (NOR) kolo*.

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Slika 11.6 Kombinaciona tablica i grafički simbol za NILI operaciju.

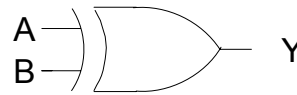
11.2.7 Isključivo-ILI operacija

Isključivo-ILI operacija (engl. Exclusive-OR, EX-OR) razlikuje se od obične ILI operacije po tome što daje kao rezultat logičku nulu i u slučaju kada su obe promenljive logičke jedinice. Kombinaciona tablica i grafički simbol za isključivo-ILI operaciju prikazani su na slici 11.7. U jednačinama se za označavanje isključivo-ILI operacije najčešće koristi simbol " \oplus ". Na osnovu kombinacione tablice može se napisati logička jednačina za isključivo-ILI funkciju:

$$Y = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B = A \oplus B \quad (11.23)$$

Isključivo-ILI operaciju realizuje *isključivo-ILI (EX-OR) kolo*.

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Slika 11.7 Kombinaciona tablica i simbol za isključivo-ILI operaciju.

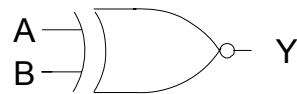
11.2.8 Operacija koincidencije (isključivo-NILI)

Operacija koincidencije daje kao rezultat logičku jedinicu ako su obe promenljive identične. Na osnovu toga se može napisati kombinaciona tabela koja je prikazana na slici 11.8. Na osnovu logičke jednačine koja definiše operaciju koincidencije:

$$Y = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{A \oplus B} \quad (11.24)$$

vidi se da je rezultat ustvari komplement isključivo-ILI operacije. Zbog toga se operacija koincidencije često naziva i isključivo-NILI operacija (engl. exclusive-NOR). Kolo koje realizuje isključivo-NILI operaciju naziva se isključivo-NILI (EX-NOR) kolo.

A	B	Y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Slika 11.8 Kombinaciona tablica i simbol za isključivo-NILI operaciju.

11.2.9 Predstavljanje logičkih funkcija

Već je rečeno da se logičke funkcije mogu definisati nad proizvoljnim brojem promenljivih. Postavlja se pitanje koliko se različitih funkcija može definisati nad skupom od n promenljivih. Pre svega, kombinaciona tablica ima $m = 2^n$ različitih vrsta. Kako se za svaku kombinacionu tablicu sa m vrsta može definisati 2^m različitih kolona za izlaznu promenljivu, broj različitih logičkih funkcija definisanih nad skupom od n promenljivih je 2^{2^n} . Kao primer, za $n = 2$ može se definisati 16 različitih logičkih funkcija.

Logičke funkcije mogu se predstaviti na nekoliko različitih načina. Prvi način predstavljanja je već ranije korišćen kod definicije elementarnih logičkih operacija a to je kombinaciona tablica. Ovaj način nije pogodan ako je broj promenljivih veliki, zato što broj vrsta tablice raste kao stepen broja dva.

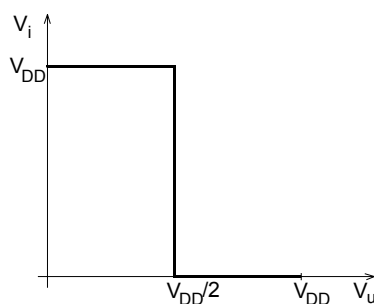
Jedan od najčešćih načina predstavljanja je *algebarski način*. Kod takvog prikaza se logička funkcija predstavlja u vidu izraza koji čine simboli promenljivih (literali) povezani simbolima I i ILI operacije. Ovaj način je pogodan za bilo koji broj logičkih promenljivih.

Algebarski način predstavljanja logičkih funkcija obično se izvodi u vidu tzv. *standardnih formi*. *Suma proizvoda* predstavlja logički zbir članova koji su oblika logičkih proizvoda. Ako logički proizvodi sadrže sve promenljive, takva standardna forma se naziva potpunom. Svaki takav potpuni logički proizvod odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost 1. Ako se formira logički proizvod članova koji su oblika

logičkog zbira promenljivih, reč je o tzv. *proizvodu suma*. Svaki potpuni logički zbir odgovara jednoj vrsti kombinacione tablice u kojoj logička funkcija ima vrednost 0.

11.3 Karakteristike realnih logičkih kola

Idealna logička kola realizuju neku, unapred predviđenu, logičku funkciju. Binarni nivoi logičke nule i logičke jedinice na izlazu jednaki su nuli, odnosno naponu napajanja. Izlazna impedansa idealnog logičkog elementa jednaka je nuli, a ulazna beskonačno velika. Prelaz izlaznog napona sa jednog na drugi nivo izvodi se naglo, pri ulaznom naponu jednakom polovini napona napajanja. Kao primer, na slici 11.9 prikazana je idealna karakteristika prenosa $v_i = f(v_u)$ jednog invertora.



Slika 11.9 Idealna karakteristika prenosa invertora.

Vreme prelaza iz jednog u drugo logičko stanje je beskonačno kratko, a idealni logički element nema nikakvu potrošnju.

Naravno, nijedna od ovih idealnih karakteristika ne može biti zadovoljena u praksi, bez obzira na to o kakvoj se tehnologiji radi. Svako realno digitalno logičko kolo mora da bar približno zadovolji neke osobine idealnih logičkih elemenata. Pre svega to su:

1. Izlazni signal mora biti jednoznačna, unapred definisana, funkcija ulaznih signala. Ta funkcija predstavlja logičku funkciju kola.

2. Karakteristika prenosa ulaz-izlaz mora biti jako nelinearna. Kao posledica toga normalni nivoi izlaznog napona koncentrisani su u dve uske oblasti, dva logička nivoa. Karakteristika prenosa u prelaznoj zoni između ove dve oblasti trebalo bi da bude što strmija.

3. Prolaskom kroz logičko kolo nastaje regeneracija amplitudskih nivoa.

4. Logička kola treba da imaju osobinu unilateralnosti ili direktivnosti, tj. promene na izlazu ne bi trebalo da izazovu nikakve naknadne promene na ulazima istog kola.

5. Broj ulaznih priključaka logičkog kola mora biti veći od jedan. Na izlazni priključak se može priključiti više od jednog ulaza.

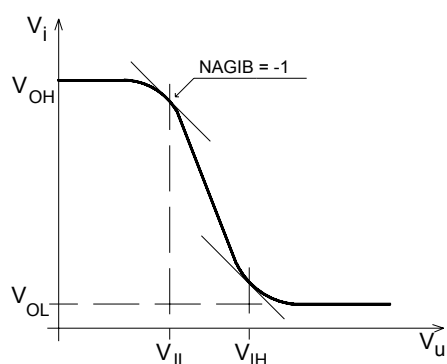
Polazeći od osobina idealnog logičkog elementa i poželjnih karakteristika realnih elemenata, izvedene su neke definicije osnovnih karakteristika realnih logičkih elemenata koje služe kao mera njihovog kvaliteta.

11.3.1 Karakteristika prenosa

Karakteristika prenosa $v_i = f(v_u)$ realnog logičkog kola samo aproksimira idealnu karakteristiku sa sl. 11.9. Na sl. 11.10 prikazana je tipična karakteristika prenosa realnog invertorskog kola. Uočavaju se dve bitne razlike između idealne i realne karakteristike prenosa. Prvo, prelaz sa jednog na drugi logički nivo nije jasno definisan, već postoji prelazna zona

između stanja logičke nule i logičke jedinice. Drugo, nivo logičke nule nije jednak 0 V, a nivo logičke jedinice nije jednak naponu napajanja.

Detaljnijim posmatranjem sl. 11.10, na karakteristici prenosa se mogu uočiti tri karakteristične oblasti. Prva je oblast niskih ulaznih napona gde je $v_u < V_{IL}$, $v_i \approx V_{OH}$. Druga predstavlja prelaznu zonu gde je $V_{IL} < v_u < V_{IH}$. Treća je oblast visokih ulaznih napona, gde je $v_u > V_{IH}$, $v_i \approx V_{OL}$. Granični naponi na karakteristici prenosa V_{IL} i V_{IH} su definisani tačkama gde je apsolutna vrednost nagiba tangente na karakteristiku jednaka jedinici. U prelaznoj zoni nagib karakteristike je znatno veći od jedinice i logičko kolo radi kao nelinearni pojačavač. U toj se oblasti rada logičko kolo normalno nalazi samo tokom promene logičkog stanja na izlazu. Dakle, napon V_{IL} predstavlja maksimalni dozvoljeni napon na ulazu koji će se tretirati kao logička nula, odnosno to je maksimalni dozvoljeni napon logičke nule na ulazu. Slično tome napon V_{IH} predstavlja minimalni dozvoljeni napon logičke jedinice na ulazu. Naponski nivo V_{OL} predstavlja maksimalni nivo logičke nule na izlazu, dok napon V_{OH} predstavlja minimalni nivo logičke jedinice na izlazu logičkog kola.



Slika 11.10 Realna karakteristika prenosa invertora.

Uobičajeno je da u složenim digitalnim kolima izlaz jednog logičkog kola pobuđuje ulaze narednih logičkih kola. Da bi ceo niz ispravno funkcionisao neophodno je da budu zadovoljeni uslovi $V_{OL} < V_{IL}$ i $V_{OH} > V_{IH}$.

Izvedena analiza karakteristike prenosa realnog invertora direktno se može primeniti i na karakteristike NI i NILI kola. Neinvertorska logička kola, kao što su I i ILI kola, imaju karakteristiku prenosa sa pozitivnim nagibom tangente, za koju je sprovedena analiza sa malim izmenama isto tako primenljiva.

11.3.2 Margine šuma

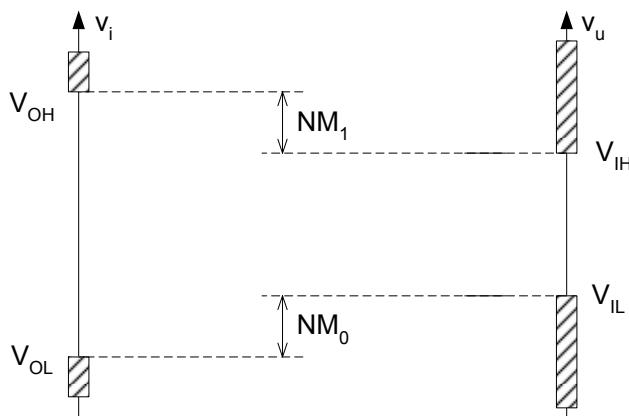
Pojam šuma kod digitalnih kola nema isto značenje kao kod analognih kola. Kod digitalnih kola šum je neželjena promena napona čvorova gde su bitni logički nivoi, tzv. logičkih čvorova. Ako je amplituda šuma na ulazu logičkog kola mala, izlaz će biti ispravan, tj. neće postojati prostiranje šuma kroz sistem kao kod analognih kola. Ako je pak amplituda neželjene promene na ulazu nekog logičkog kola velika, ona može izazvati logičke greške. Pod pojmom *marginе šuma* podrazumeva se dozvoljena promena naponskog nivoa na ulazu logičkog kola koja neće izazvati neželjenu promenu na izlazu. Kako amplituda dozvoljene promene nivoa zavisi i od logičkog stanja na ulazu, postoje dve margine šuma, za logičku jedinicu i logičku nulu.

Sa sl. 11.11 može se uočiti da je margina šuma za logičku jedinicu :

$$NM_1 = V_{OH} - V_{IH} \quad (11.25)$$

a za logičku nulu:

$$NM_0 = V_{IL} - V_{OL} \quad (11.26)$$



Slika 11.11 Definicija margina šuma za logičku nulu i logičku jedinicu.

Zbog neizbežnih tolerancija u proizvodnji integriranih kola, proizvođači obično specificiraju vrednosti četiri karakteristična napona za najgori slučaj: V_{OH} , V_{IH} , V_{OL} i V_{IL} . Takođe, pošto je definisanje karakterističnih tačaka preko nagiba tangente nepogodno za merenje, koriste se sledeće praktične definicije četiri karakteristična napona:

- V_{OH} - minimalni izlazni napon kada je izlaz u stanju logičke jedinice,
- V_{IH} - minimalni ulazni napon koji će logičko kolo prepoznati kao logičku jedinicu,
- V_{OL} - maksimalni izlazni napon kada je izlaz u stanju logičke nule,
- V_{IL} - maksimalni ulazni napon koji će logičko kolo prepoznati kao logičku nulu.

11.3.3 Faktor grananja na izlazu i ulazu

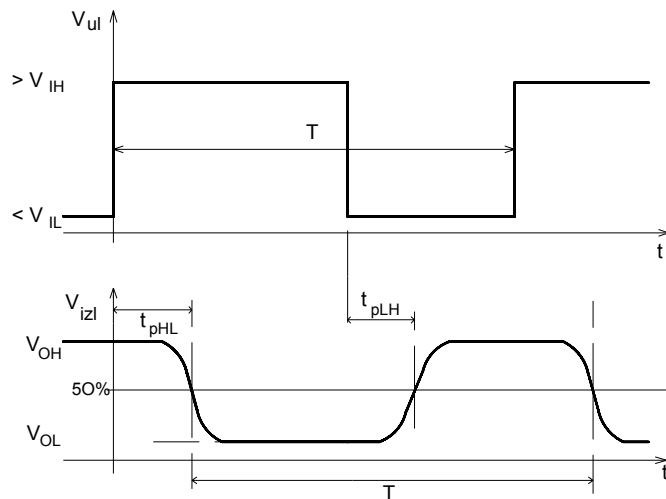
Ulazna impedansa realnog logičkog kola nikada nije beskonačno velika, a izlazna impedansa nikada nije jednaka nuli. Zbog toga se prilikom sprežavanja logičkih kola, radi formiranja složenijih digitalnih mreža, pojavljuje problem opterećivanja izlaza.

Faktor grananja na izlazu je broj ulaznih priključaka koji se mogu priključiti na izlaz, a da se ne naruše dozvoljene varijacije logičkih nivoa. Pri izračunavanju faktora grananja na izlazu može se uočiti da sva kola ne opterećuju podjednako prethodno kolo. Zato se u okviru svake familije logičkih kola definiše tzv. standardno opterećenje pomoću koga se određuje uticaj svakog ulaza na izlaz prethodnog kola.

Faktor grananja na ulazu predstavlja broj nezavisnih ulaznih priključaka. U većini slučajeva ograničen je samo praktičnim razlozima, kao što su broj nožica na kućištu, male potrebe za kolima sa velikim brojem ulaza i sl., ali se kod nekih familija logičkih kola broj ulaza ograničava i zbog degradacije električnih karakteristika.

11.3.4 Dinamičke karakteristike

Prelaz iz jednog u drugo logičko stanje ne može se kod realnog logičkog kola obaviti beskonačno brzo. Razlozi za to su višestruki. Pre svega, u svakom kolu postoje kapaciteti na kojima se napon, kao što je poznato, ne može trenutno promeniti, već se takve promene vrše po eksponencijalnom zakonu. Osim toga, struje kroz elemente su konačne, a jačina struje je ograničena zahtevima za što manjom potrošnjom kola. Iz ovih razloga promena nivoa na izlazu logičkog kola se obavlja za konačno vreme i kasni za promenama nivoa na ulazu. Posmatrajmo slučaj kada je pobudni signal logičkog invertora idealizovan i predstavljen pravougaonom povorkom impulsa kao na slici 11.12. Izlazni signal realnog invertora imaće tipični oblik koji je takođe prikazan na istoj slici. Na vremenskom dijagramu izlaznog signala se mogu uočiti karakteristični vremenski intervali koji definišu kašnjenje odziva za pobudom.



Slika 11.12 Odziv realnog invertora na idealizovanu pobudu.

Vreme kašnjenja opadajuće ivice t_{pHL} predstavlja vreme za koje opadajuća ivica izlaznog signala kasni za pobudom koja ju je izazvala. Definiše se kao vreme između trenutka promene ulaznog signala i trenutka kada se izlazni signal promeni za 50% logičke amplitude $V_{OH} - V_{OL}$.

Vreme kašnjenja rastuće ivice t_{pLH} predstavlja vreme između trenutka promene ulaznog signala i trenutka kada izlazni signal poraste za 50% logičke amplitude.

Vremena kašnjenja rastuće i opadajuće ivice ne moraju biti, i najčešće nisu ista, što zavisi od konstrukcije logičkog kola. Često se, radi jednostavnosti izračunavanja uticaja kašnjenja na rad kola definiše i tzv. vreme kašnjenja t_p (t_d) koje predstavlja aritmetičku sredinu vremena kašnjenja rastuće i opadajuće ivice signala na izlazu.

Može se primetiti da slika 11.12 predstavlja malo idealizovanu situaciju jer je pobudni signal povorka pravougaonih impulsa sa idealnim rastućim i opadajućim ivicama. Kako se pobuda takođe generiše u nekom realnom elektronskom kolu, ulazni impuls mora imati ivice konačnog trajanja, pa je izračunavanje vremena kašnjenja nešto komplikovanije.

11.3.5 Disipacija (potrošnja) logičkog kola i proizvod snage i kašnjenja

Svako realno logičko kolo mora imati neku potrošnju. Međutim, disipaciju kola nije uvek lako odrediti jer će se kolo, zavisno od logičkog stanja, nalaziti u različitim uslovima rada. Stoga

se obično uzima da se kolo pri definiciji disipacije pobuđuje povorkom pravougaonih impulsa sa jednakim trajanjem impulsa i pauze, tako da je struja izvora za napajanje aritmetička sredina struja u oba logička stanja. Tada je prosečna snaga disipacije:

$$P_D = \frac{V_{CC}(I_{CCmin} + I_{CCmax})}{2} \quad (11.27)$$

Za neka logička kola prosečna snaga disipacije zavisi i od učestanosti promena stanja. U tom slučaju mora se uvek navesti pri kakvim je uslovima izračunata ili izmerena snaga disipacije.

Snaga disipacije logičkih kola je obično povezana sa maksimalnom mogućom brzinom rada kola. Naime, kola sa većom brzinom rade sa većim strujama, pa se kod njih parazitne kapacitivnosti brže pune i prazne, ili tranzistori rade u takvom radnom režimu kada je disipacija veća. Zbog toga se pri projektovanju logičkih kola uvek pravi neki kompromis između brzine i potrošnje. Kao mera kvaliteta takvog kompromisa obično se definiše *proizvod snage i kašnjenja*, *PDP* (Power-Delay Product), izražen u jedinicama $W \times s = J$, kao:

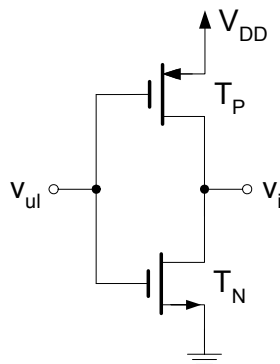
$$PDP = P_D t_p \quad (11.28)$$

a koji u stvari predstavlja energiju koju logičko kolo utroši tokom prelaza sa nule na jedinicu i obratno. Kompromis je bolji ako je *PDP* manji. Savremena logička kola imaju *PDP* reda pJ, jer su tipične vrednosti kašnjenja reda ns, a tipične vrednosti snage disipacije reda mW.

11.4 Realizacija invertora sa MOS tranzistorima

Najprostije logičko kolo u MOS tehnologiji je invertor. Pored toga što obavlja jednu od osnovnih logičkih operacija, komplementiranje, kolo invertora predstavlja osnovu za formiranje složenijih logičkih kola. Iako invertor u osnovnoj konfiguraciji predstavlja najobičniji stepen sa zajedničkim emitorom, u praktičnim realizacijama se uvek izbegava upotreba otpornika koji se zamenjuju tranzistorima. Od brojnih realizacija invertora, ovde ćemo proučiti samo invertor sa komplementarnim MOS tranzistorima, ili CMOS invertor, zbog njegovih odličnih karakteristika.

CMOS invertor, prikazan na slici 11.13, se sastoji od dva MOS tranzistora sa indukovanim kanalom. Jedan od tranzistora ima kanal *n* tipa, dok drugi tranzistor ima kanal *p* tipa. Kod svakog od tranzistora osnova je spojena na sors tako da nema uticaja efekta podloge.



Slika 11.13 CMOS invertor.

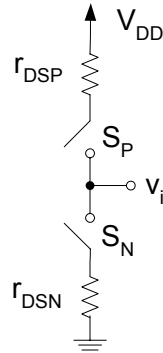
Kada je na ulazu nizak napon, NMOS tranzistor ne može da provodi jer je $V_{ul} = V_{GSN} < V_{IN}$, a PMOS tranzistor provodi u linearnom režimu jer je $|V_{GSP}| = |V_{ul} - V_{DD}| > |V_{IP}|$. Struja PMOS tranzistora je vrlo mala, jer je jednaka sa strujom curenja zakočenog NMOS tranzistora, pa je izlazni napon je praktično jednak naponu napajanja. Dakle, napon logičke jedinice na izlazu CMOS invertora je:

$$V_{OH} = V_{DD} \quad (11.29)$$

Kada je na ulazu visok napon, blizak naponu napajanja, NMOS tranzistor provodi u linearnom režimu, jer je $V_{ul} = V_{GSN} > V_{IN}$, a PMOS tranzistor je zakočen, jer je $|V_{GSP}| = |V_{ul} - V_{DD}| < |V_{IP}|$. Struja kroz invertor je mala, a izlazni napon je praktično nula (tipično manji od 10 mV). Dakle, napon logičke nule na izlazu CMOS invertora je:

$$V_{OL} = 0 \text{ V} \quad (11.30)$$

Pošto je u oba logička stanja jedan od tranzistora zakočen, struja izvora za napajanje u stabilnim logičkim stanjima je infinitezimalno mala. Zbog toga je statička disipacija CMOS invertora reda nekoliko nW. I pored izuzetno male statičke radne struje, CMOS invertor ima značajan izlazni strujni kapacitet jer provodni tranzistor može da primi ili da preda znatnu struju otpornom ili kapacitivnom opterećenju vezanom na izlaz. To znači da će faktor grananja na izlazu biti veliki i da će dinamičke karakteristike biti dobre.



Slika 11.14 Modelovanje CMOS invertora sa dva komplementarna prekidača.

Rad invertora se može najprostije objasniti kolom sa dva prekidača, koji se naizmenično uključuju i isključuju, kao što je to prikazano na slici 11.14. Kao što se vidi, svaki tranzistor je modelovan malim ali konačnim otpornikom, čija je otpornost jednaka otpornosti sors-drejn odgovarajućeg tranzistora, koja je izračunata za rad u linearnom režimu pri naponu $|v_{DS}| \approx 0$, odnosno:

$$r_{DSN} = \frac{1}{2k_n \frac{W_N}{L_N} (V_{DD} - V_{IN})} \quad (11.31)$$

$$r_{DSP} = \frac{1}{2k_p \frac{W_P}{L_P} (V_{DD} - V_{IP})} \quad (11.32)$$

11.4.1 Karakteristika prenosa

Za određivanje karakteristike prenosa mogu se koristiti jednačine za struju drejna NMOS i PMOS tranzistora, koje u slučaju neopterećenog invertora moraju biti jednake.

Povećavajući ulazni napon od nule, NMOS tranzistor počinje da provodi pri ulaznom naponu koji je jednak prekidnom naponu NMOS tranzistora, V_{iN} . Tada NMOS tranzistor radi u režimu zasićenja, dok je PMOS tranzistor u linearnom režimu. Izjednačujući struje kroz NMOS i PMOS tranzistor dobija se jednačina:

$$k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N (v_u - V_{iN})^2 = k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P \left[2(V_{DD} - v_u - |V_{iP}|)(V_{DD} - v_i) - (V_{DD} - v_i)^2 \right] \quad (11.33)$$

čijim se diferenciranjem po v_u dobija:

$$k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N (v_u - V_{iN}) = k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P \left[(v_i - V_{DD}) + (|V_{iP}| + v_u - v_i) \frac{dv_i}{dv_u} \right] \quad (11.34)$$

Uvođenjem geometrijskog faktora:

$$K_R = \frac{k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N}{k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P} \quad (11.35)$$

i zamenom $v_u = V_{iL}$, $v_i = V_{iOH}$, $dv_i/dv_u = -1$, iz prethodne dve jednačine se dobija sistem jednačina:

$$K_R (V_{iL} - V_{iN})^2 = 2(V_{DD} - V_{iL} - |V_{iP}|)(V_{DD} - V_{iOH}) - (V_{DD} - V_{iOH})^2 \quad (11.36)$$

$$K_R (V_{iL} - V_{iN}) = 2V_{iOH} - V_{DD} - V_{iL} - |V_{iP}| \quad (11.37)$$

Iz druge jednačine sistema se dobija:

$$V_{iOH} = \frac{(1 + K_R)V_{iL} + V_{DD} + |V_{iP}| - K_R V_{iN}}{2} \quad (11.38)$$

Posebno je interesantan slučaj uparenih tranzistora kada je $V_{iN} = |V_{iP}|$ i $K_R = 1$, čime se obezbeđuje isti strujni kapacitet izlaza u oba logička stanja. Pošto je zbog veće pokretljivosti elektrona $k_n \approx 2.5k_p$, za zadovoljenje uslova $K_R = 1$ odnos W/L PMOS i NMOS tranzistora treba da budu $(W/L)_P = 2.5(W/L)_N$. Tada se poslednja jednačina uprošćava i postaje:

$$V_{iOH} = \frac{2V_{iL} + V_{DD}}{2} \quad (11.39)$$

pa se iz prve jednačine za apscisu prelomne tačke na karakteristici prenosa V_{iL} konačno dobija:

$$V_{IL} = \frac{1}{8}(3V_{DD} + 2V_t) \quad (11.40)$$

Koordinate druge prelomne tačke na karakteristici prenosa mogu se naći na sličan način. Kada je ulazni napon V_{IH} , izlazni napon je dovoljno nizak tako da se može smatrati da NMOS tranzistor radi u linearnom režimu, a PMOS u zasićenju. Izjednačavanjem struja oba tranzistora dobija se jednačina:

$$k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N \left[2(v_u - V_{tN})v_i - v_i^2 \right] = k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P (V_{DD} - v_u - |V_{tP}|)^2 \quad (11.41)$$

Diferenciranjem ove jednačine po v_u dobija se:

$$k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N \left[(v_u - V_{tN} - v_i) \frac{dv_i}{dv_u} + v_i \right] = -k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P (V_{DD} - v_u - |V_{tP}|) \quad (11.42)$$

Zamenom $v_u = V_{IH}$, $v_i = V_{OL}$, $dv_i/dv_u = -1$ u prethodne dve jednačine, dobija se sistem jednačina:

$$K_R \left[2(V_{IH} - V_{tN})V_{OL} - V_{OL}^2 \right] = (V_{DD} - V_{IH} - |V_{tP}|)^2 \quad (11.43)$$

$$K_R (-V_{IH} + V_{tN} + 2V_{OL}) = -(V_{DD} - V_{IH} - |V_{tP}|) \quad (11.44)$$

čijim se rešavanjem dobijaju vrednosti za V_{IH} i V_{OL} . Iz druge jednačine se dobija izlazni napon:

$$V_{OL} = \frac{(1 + K_R)V_{IH} - V_{DD} + |V_{tP}| - K_R V_{tN}}{2K_R} \quad (11.45)$$

koji se u slučaju uparenih tranzistora redukuje na:

$$V_{OL} = \frac{2V_{IH} - V_{DD}}{2} \quad (11.46)$$

pa se za apscisu prelomne tačke na karakteristici prenosa V_{IH} konačno dobija:

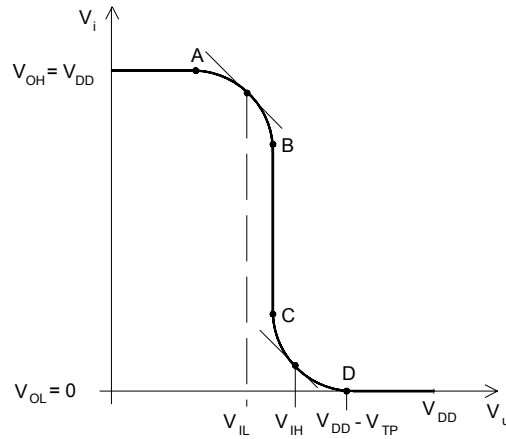
$$V_{IH} = \frac{1}{8}(5V_{DD} - 2V_t) \quad (11.47)$$

Sada se mogu odrediti margine šuma CMOS invertora sa uparenim tranzistorima:

$$NM_0 = V_{IL} - V_{OL} = \frac{1}{8}(3V_{DD} + 2V_t) \quad (11.48)$$

$$NM_1 = V_{OH} - V_{IH} = \frac{1}{8}(3V_{DD} + 2V_t) \quad (11.49)$$

Dakle, *marginе šuma su iste*, što je posledica uparenosti karakteristika tranzistora. Naravno, ako tranzistori nisu upareni, karakteristika prenosa neće biti simetrična i marginе šuma neće biti iste.



Slika 11.15 Karakteristika prenosa CMOS invertora.

Na karakteristici prenosa, koja je prikazana na slici 11.15, postoji još jedna interesantna oblast. To je segment između tačaka B i C. U toj radnoj oblasti oba tranzistora rade u zasićenju, pa je karakteristika prenosa vertikalna, a pojačanje invertora teorijski beskonačno. Ulazni napon za koji je karakteristika prenosa vertikalna dobija se rešavanjem jednačine:

$$k_n \left(\frac{W}{L} \right)_N (v_u - V_{tN})^2 = k_p \left(\frac{W}{L} \right)_P (V_{DD} - v_u - |V_{tP}|)^2 \quad (11.50)$$

čije je rešenje:

$$v_u = \frac{V_{DD} - |V_{tP}| + V_{tN} \sqrt{K_R}}{1 + \sqrt{K_R}} \quad (11.51)$$

odnosno, u slučaju uparenih tranzistora:

$$v_u = V_{DD}/2 \quad (11.52)$$

U oblasti BC, vrednost izlaznog napona ograničena je nejednačinama:

$$v_u - V_{tN} \leq v_i \leq v_u + |V_{tP}| \quad (11.53)$$

odakle se smenom vrednosti za v_u dobija:

$$\frac{V_{DD} - |V_{tP}| - V_{tN}}{1 + \sqrt{K_R}} \leq v_i \leq \frac{V_{DD} + (|V_{tP}| + V_{tN})\sqrt{K_R}}{1 + \sqrt{K_R}} \quad (11.54)$$

odnosno, u slučaju uparenih tranzistora:

$$V_{DD}/2 - V_t \leq v_i \leq V_{DD}/2 + V_t \quad (11.55)$$

11.4.2 Dinamičke karakteristike

Tačna analiza dinamičkih karakteristika CMOS invertora može se izvesti samo uz pomoć računarskih programa. Za aproksimativnu analizu potrebno je uvesti i određene uprošćavajuće pretpostavke. Pored već uobičajene pretpostavke o uparenosti NMOS i PMOS tranzistora, često se koristi i pretpostavka o koncentrisanju svih kapacitivnosti u izlazni čvor.

Kod savremenih CMOS kola, kod kojih je uobičajeno $V_t = 0.2V_{DD}$, vreme kašnjenja opadajuće ivice izlaznog signala je dato izrazom:

$$t_{pHL} = \frac{0.8C_T}{k_n \left(\frac{W}{L}\right)_N V_{DD}} \quad (11.56)$$

gde je C_T ukupna parazitna kapacitivnost na izlazu. Vreme kašnjenja rastuće ivice izlaznog signala je dato sličnim izrazom:

$$t_{pLH} = \frac{0.8C_T}{k_p \left(\frac{W}{L}\right)_P V_{DD}} \quad (11.57)$$

Ako su tranzistori upareni, vremena kašnjenja rastuće i opadajuće ivice su ista.

11.4.3 Disipacija CMOS kola

Kod CMOS invertora, kao i kod složenijih CMOS kola, postoje četiri uzroka za disipaciju kola. To su: struja curenja, kapacitivnost opterećenja, interne kapacitivnosti i prelazna stanja. Disipacija usled struje curenja predstavlja statičku disipaciju koja je ustvari proizvod napona napajanja V_{DD} i struje curenja. Statička disipacija CMOS kola je reda μW .

Mnogo važnija su ostala tri uzroka disipacije koji se javljaju samo prilikom promene logičkih stanja i koji su poznati pod zajedničkim nazivom *dinamička disipacija*. Kada se inverter koji je opterećen kapacitivnim opterećenjem C_p pobuđuje povorkom impulsa sa jednakim trajanjem impulsa i pauze, energija koja se predaje kondenzatoru u toku jedne poluperiode, a zatim disipira na tranzistoru iznosi $C_p V_{DD}^2 / 2$. Srednja disipacija CMOS invertora je onda:

$$P_{D1} = f C_p V_{DD}^2 \quad (11.58)$$

Postojanje parazitnih kapacitivnosti samih tranzistora takođe izaziva potrošnju energije tokom promene stanja, koja se može opisati istim izrazom kao za P_{D1} ako se C_p zameni sa parazitnim kapacitetom C_T :

$$P_{D2} = f C_T V_{DD}^2 \quad (11.59)$$

Najteže je analitički opisati disipaciju CMOS kola kada CMOS kolo prelazi iz jednog stanja u drugo, a radna tačka prolazi kroz oblast u kojoj su oba tranzistora provodna. Disipacija CMOS kola usled prelaznog režima je približno data izrazom:

$$P_{D3} = 0.5 f (V_{DD} - 2V_T) I_{DD\max} (t_{LH} + t_{HL}) \quad (11.60)$$

gde je $I_{DD\max}$ maksimalna nekapacitivna struja tokom promene stanja.

Pošto sva tri izraza za dinamičku disipaciju pokazuju linearnu zavisnost disipacije od učestanosti f , u praksi je uobičajeno da se dinamička disipacija prikazuje izrazom:

$$P_D = f(C_p + C_{pD})V_{DD}^2 \quad (11.61)$$

gde je C_{pD} ekvivalentna kapacitivnost, kojom se aproksimiraju teško merljivi uticaji disipacije usled parazitnih kapacitivnosti i promene stanja. Iz prethodnih izraza sledi:

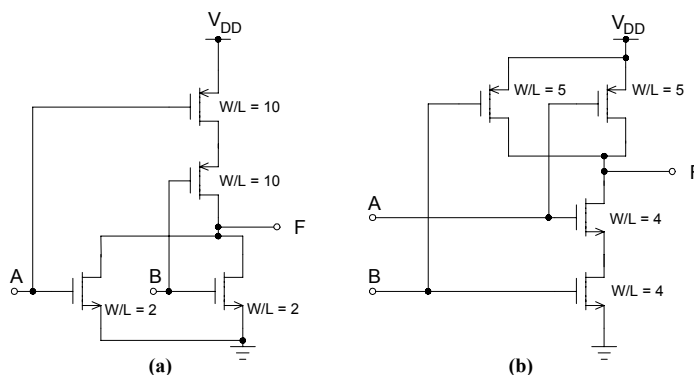
$$C_{pD} = C_T + 0.5(V_{DD} - 2V_T)I_{DD\max}(t_{LH} + t_{HL})/V_{DD}^2 \quad (11.62)$$

Kapacitivnost C_{pD} se obično određuje eksperimentalno, merenjem disipacije kola bez opterećenja. Interesantno je da se metod izražavanja dinamičke disipacije pomoću izraza za P_D može generalizovati i primenjivati čak kod vrlo složenih CMOS kola. Tipične vrednosti kapacitivnosti C_{pD} su reda 10 - 30 pF, što zavisi od složenosti i karakteristika CMOS kola.

Tipična vrednost proizvoda snage i kašnjenja CMOS kola niskog stepena integracije je oko 10 pJ. Interesantno je primetiti da kod CMOS kola parametar PDP linearno zavisi od učestanosti promena logičkih stanja. Kod složenih logičkih mreža samo mali broj logičkih kola menja stanje u jednom takt ciklusu. Uzimajući ovu činjenicu u obzir, može se zaključiti da CMOS kola visokog stepena integracije imaju znatno manju prosečnu disipaciju po logičkom kolu. Kod CMOS kola u VLSI tehnici, parametar PDP može biti i manji od 1 pJ čak i pri učestanostima od nekoliko desetina MHz.

11.5 Logička kola sa MOS tranzistorima

CMOS logička kola dobijaju se proširivanjem osnovnog invertorskog kola sa slike 11.13. Na slici 11.16 su prikazana su CMOS NILI i NI kola sa dva ulaza. NILI kolo dobijeno je dodavanjem paralelnog n -kanalnog tranzistora T_3 i serijskog p -kanalnog tranzistora T_4 . Za svaki dodatni ulaz dodaju se dva komplementarna tranzistora. Formiranje NI kola je dualan proces. Za svaki ulazni priključak dodaje se serijski n -kanalni tranzistor i paralelni p -kanalni tranzistor.



Slika 11.16 CMOS logička kola: a) NILI kolo, b) NI kolo.

Rad kola sa slike 11.16 je jednostavno objasniti. Izlaz NILI kola biće na visokom nivou samo ako su oba ulaza na niskom nivou. Dakle, imamo:

$$Y = \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{A + B} \quad (11.63)$$

što je zaista logička funkcija NILI kola. Nasuprot tome, izlaz NI kola biće na niskom nivou jedino ako su oba ulaza na visokom nivou. Na osnovu toga se može napisati logička jednačina:

$$Y = \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B} \quad (11.64)$$

koja predstavlja jednačinu NI kola.

Neinvertorska (ILI ili I) kola se mogu formirati vezivanjem dodatnog invertora iza invertorskih (NILI ili NI) kola.

Statičke karakteristike CMOS logičkih kola su vrlo slične statičkim karakteristikama CMOS invertora. Dinamičke karakteristike zavise u velikoj meri od odnosa W/L PMOS i NMOS tranzistora. Kako je $k_n = 2.5k_p$, da bi vremena kašnjenja rastuće i opadajuće ivice bila ista potrebno je da bude:

$$\left(\frac{W}{L}\right)_p = 2.5N \left(\frac{W}{L}\right)_n \quad (11.65)$$

kod NILI kola, a kod NI kola treba da bude zadovoljen uslov:

$$\left(\frac{W}{L}\right)_p = \frac{2.5}{N} \left(\frac{W}{L}\right)_n \quad (11.66)$$

gde je N broj ulaza u logičko kolo.

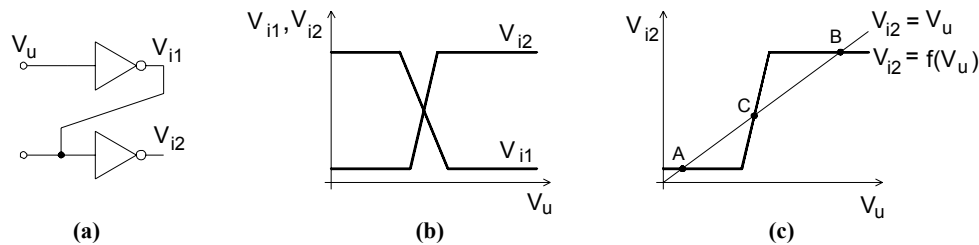
11.6 Bistabilna kola

Logička kola pripadaju klasi *kombinacionih* kola, čije stanje na izlazu zavisi samo od trenutnog stanja ulaznih priključaka. Osim kombinacionih kola, u digitalnoj elektronici se koriste i *sekvencijalna* kola, kod kojih stanje na izlazu zavisi od trenutnog stanja na ulazu ali i od prethodnih stanja na ulazu, ili, drukčije rečeno, od sekvence (redosleda) ulaznih signala. Sekvencijalna kola moraju sadržati elemente koji imaju sposobnost pamćenja (memorisanja) stanja. Jedan takav element mora imati bar dva stabilna stanja iz kojih može izaći samo pod dejstvom pobudnog signala. Zbog jednostavnosti realizacije, u digitalnoj elektronici se koriste elementi sa samo dva stabilna stanja, koji se nazivaju *bistabilna kola*.

Rad svih bistabilnih kola zasnovan je na korišćenju *pozitivne povratne sprege* ili *regeneracije*. Posmatrajmo jednostavno kolo sa slike 11.17a, koje se sastoji od dva invertora vezana na red. Karakteristike prenosa koje prikazuju izlazne napone oba invertora u funkciji ulaznog napona v_u prikazane su na slici 11.17b.

Sa slike 11.17b se vidi da je napon na izlazu v_{i2} u fazi sa naponom na ulazu. Ako bi se izlaz drugog invertora vezao na ulaz prvog, tada bi bilo $v_{i2} = v_u$. Ova linearna veza prikazana je na slici 11.17c zajedno sa karakteristikom $v_{i2} = f(v_u)$. Sistem jednačina $v_{i2} = f(v_u)$, $v_{i2} = v_u$ ima tri rešenja koja su na slici označena sa A, B i C. U tačkama A i B pojačanje bar jednog od invertora je nula, a to znači da je kružno pojačanje u petlji pozitivne povratne sprege takođe jednako nuli. Nasuprot tome, u tački C oba invertora rade u pojačavačkom režimu, jer se tačka C

nalazi u prelaznoj zoni karakteristike prenosa. Kružno pojačanje je veliko i pozitivno. Vrlo mala promena napona u nekom čvoru koji je obuhvaćen petljom kružnog pojačanja izazvaće dalje pojačanje (regeneraciju) te promene, što na kraju rezultuje ulaskom jednog invertora u stanje logičke jedinice na izlazu, a drugog u stanje logičke nule na izlazu. Dakle, vrlo mala promena napona $v_{i2} = v_u$ izazvaće, zavisno od svog polariteta, prelaz iz radne tačke C u tačku A ili B. Zato se za radne tačke A i B kaže da su *stabilne*, a za tačku C da je *nestabilna* ili *metastabilna*.



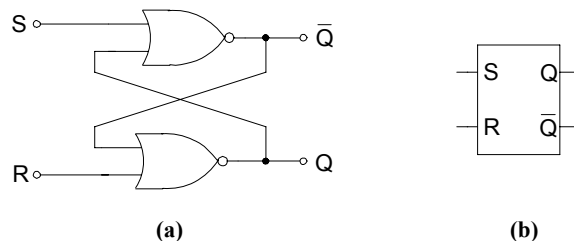
Slika 11.17 a) Serijska veza dva invertora, b) izlazni naponi invertora u funkciji ulaznog napona, c) određivanje radnih tačaka bistabilnog kola.

Da bi se bistabilno kolo izvelo iz stabilnog stanja, mora se dovesti u režim kada je kružno pojačanje veće od 1 da bi se stvorio regenerativni efekat. Potrebno je, dakle, dovesti invertore u pojačavački režim. To se može ostvariti dovođenjem *pobudnog* (okidnog) (engl. trigger) *impulsa* u kolo. Da bi obezbedio promenu stanja pobudni impuls mora imati odgovarajući polaritet, dovoljnu amplitudu i dovoljno trajanje. U principu se okidni impuls može uneti bilo gde u petlju povratne sprege, ali je, iz praktičnih razloga, najjednostavnije umesto invertora upotrebiti dvoulazna NI ili NILI logička kola i pobudni impuls dovesti na slobodni ulaz kola.

Dakle, bistabilna kola imaju dva stabilna stanja u kojima ostaju nedefinisano dugo do dovođenja odgovarajuće pobude. Postoje dve vrste bistabilnih kola. Kod kola prve vrste, koja se nazivaju *leč kola* (engl. latch) ili transparentna kola, izlaz stalno prati promene na ulazima dok se ne dovede pobudni signal koji zamrzava stanje na izlazu. Kod kola druge vrste, koja se nazivaju *flipflopovi*, stanje na izlazu se menja samo posle dovođenja odgovarajuće ivice pobudnog signala i posle toga se ne menja. Uu literaturi i u katalozima vrlo često se ne pravi razlika između ove dve klase bistabilnih okidnih kola, pa se kola iz obe vrste nazivaju flipflopovima.

11.6.1 SR leč

Na slici 11.18a je prikazano bistabilno kolo realizovano sa NILI logičkim kolima koje se naziva SR leč kolo. Slobodni ulazi logičkih kola označeni su sa S i R , a izlazi sa Q i \bar{Q} jer moraju biti komplementarni. Kada su izlazni nivoi $Q=1$ i $\bar{Q}=0$, kaže se da je leč kolo setovano, dok se za slučaj kada je $Q=0$ i $\bar{Q}=1$ kaže da je leč kolo resetovano. Na slici 11.18b je prikazan grafički simbol za SR leč kolo.



Slika 11.18: SR leč kolo sa NILI kolima, a) Šema kola, b) Grafički simbol.

Iz kombinacione tabele NILI kola, se vidi da se dovođenjem kombinacije $S = 1, R = 0$ na ulaze kola, izlazi postavljaju u novo stanje $Q = 1, \bar{Q} = 0$. Kaže se da je SR leč kolo *setovano*. Dovođenjem kombinacije $S = 0, R = 1$, izlazi se postavljaju u novo stanje $Q = 0, \bar{Q} = 1$, odnosno, leč kolo je *resetovano*. Pošto se postavljanje željenog stanja vrši dovođenjem logičke jedinice na odgovarajući ulaz, kaže se da se ulazi aktiviraju visokim nivoom ili da je na ulazu *aktivni nivo visok*. Kada se na ulazu nalazi kombinacija $S = R = 0$, na izlazu se ne dešava nikakva promena, jer su oba ulazna signala na neaktivnom nivou. Nasuprot tome, ako se na ulazima pojavi kombinacija $S = R = 1$, oba izlaza će se nalaziti u stanju logičke nule i neće biti komplementarni. Posle prelaska pobude $S = R = 1$ u stanje $S = R = 0$, stanje na izlazu se ne može predvideti jer zavisi od toga koji će se ulazni signal prvi promeniti. Zbog toga se kombinacija $S = R = 1$ naziva *zabranjeno* ili *nedozvoljeno stanje na ulazu*.

Opisano razmatranje rada SR leč kola prikazano je u tabeli na slici 11.19a, koja daje stanja na izlazima za sve moguće kombinacije stanja na ulazima. Takva tabela se naziva *funkcionalna* ili *karakteristična tabela*. U funkcionalnoj tabeli Q_n označava trenutno stanje izlaza Q dok Q_{n+1} označava naredno stanje izlaza, odnosno stanje posle promene ulaznih signala. Osim karakteristične tabele u sintezi složenih sekvencijalnih sistema često se koristi i *eksitaciona tabela* ili *tabela pobude*. Eksitaciona tabela se može izvesti iz karakteristične tabele i određuje ulazne signale koji prevode kolo u željeno stanje. Može se uočiti da za pojedine prelaze nije važno na kakvom se nivou nalazi neki ulaz. Takva situacija se označava u tabeli simbolom \times , koji označava da je nivo ulaznog signala nevažan. Ova činjenica može doprineti znatnom uprošćavanju kola u procesu sinteze. Tabela na slici 11.19b predstavlja eksitacionu tabelu SR leč kola sa NILI kolima.

S	R	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}
0	0	Q_n	\bar{Q}_n
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0

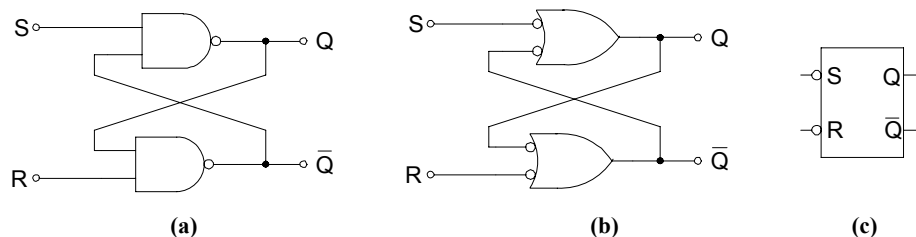
(a)

Q_n	Q_{n+1}	S	R
0	0	0	\times
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	\times	0

(b)

Slika 11.19: a) Funkcionalna i b) eksitaciona tabela SR leč kola sa NILI kolima.

SR leč kolo se može napraviti i korišćenjem NI kola umesto invertora. Šema SR kola realizovanog sa dvoulaznim NI kolima prikazana je na slikama 11.20a i 11.20b, a grafički simbol takvog SR leč kola na slici 11.20c.



Slika 11.20: SR leč kolo sa NI kolima, a) Šema kola, b) Šema kola sa alternativnim simbolima, c) Grafički simbol.

Analizom kola, koristeći kombinacionu tabelu za NI kolo, dobija se funkcionalna tabela 11.21a. Uočava se jedna bitna razlika u odnosu na funkcionalnu tabelu SR leč kola realizovanog sa NILI kolima: postavljanje leč kola u stanje $Q = 1$ (setovanje) vrši se kombinacijom $S = 0, R = 1$, dok se postavljanje u stanje $Q = 0$ (resetovanje) vrši kombinacijom $S = 1, R = 0$.

Dakle, promena stanja SR leč kola sa NI kolima vrši se *niskim aktivnim nivoom*. Ova činjenica je na grafičkom simbolu prikazana pomoću kružića na odgovarajućim S i R ulazima. Druga razlika se odnosi na nedozvoljenu kombinaciju na ulazu koja je kod ovog kola $S = 0, R = 0$. Eksitaciona tabela SR leč kola sa NI kolima prikazana je na slici 11.21b.

S	R	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Q_n	\bar{Q}_n

(a)

Q_n	Q_{n+1}	S	R
0	0	1	×
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	×	1

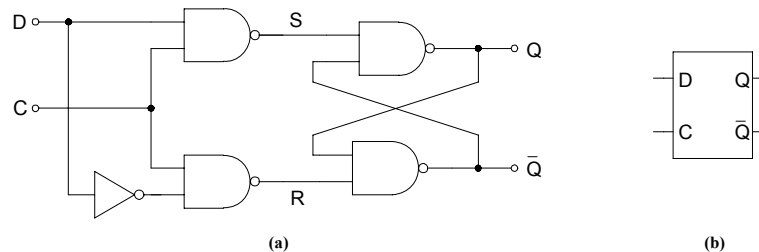
(b)

Slika 11.21: a) Funkcionalna i b) eksitaciona tabela SR leč kola sa NI kolima.

11.6.2 D leč

Razdvojeni ulazi za setovanje i resetovanje leč kola, kao što je to slučaj kod opisanih SR leč kola, pogodni su za primene u kontrolnim sistemima. Međutim, za primene u sistemima za pamćenje informacija pogodnije je imati samo jedan ulaz u leč kolo, koji će onda određivati stanje na izlazu. Takvu funkciju obavlja *D leč kolo*.

Šema i grafički simbol D leč kola prikazani su na slici 11.22. Kao što se vidi, osnovu šeme D leč kola čini SR leč kolo. Najvažnija razlika je dodatni inverter na ulazu koji uklanja mogućnost dovođenja nedozvoljene kombinacije signala na ulaz. Ulazni signal dozvole C (CLK, EN, ENABLE) može biti aktivan kada je na visokom nivou (kao na slici 11.22) ili, u slučaju drukčije konfiguracije kola, kada je na niskom nivou.



Slika 11.22: D leč kolo realizovano sa NI kolima, a) Šema kola, b) Grafički simbol.

Funkcionisanje D leč kola se može jednostavno objasniti posmatranjem šeme sa slike 11.22a. Neka je $C = 1$. Kada je na ulazu $D = 1$, tada je $S = 0, R = 1$, pa se SR leč kolo setuje. Suprotno tome, kada je na ulazu $D = 0$ na ulazu SR leč kola je $S = 1, R = 0$, pa se kolo resetuje. Dakle, na izlazu se uvek pojavljuje isti signal kao na ulazu, naravno, posle kašnjenja kroz logičke elemente. Kada se C vrati na nivo logičke nule stanje na izlazu se zamrzava. U tabeli na slici 11.23 su prikazane funkcionalna i eksitaciona tabela D leč kola.

D	C	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}
0	1	0	1
1	1	1	0
×	0	Q_n	\bar{Q}_n

(a)

Q_n	Q_{n+1}	D	C
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

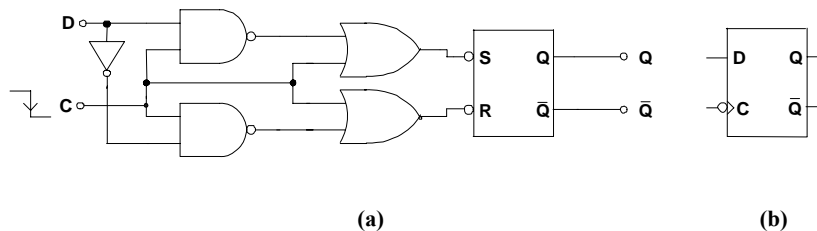
(b)

Slika 11.23: a) Funkcionalna i b) eksitaciona tabela D leč kola.

U statičkom režimu D leč kola onemogućeno je pojavljivanje nedozvoljene kombinacije ulaznih signala $S = R = 0$, ali problem nestabilnosti nije u potpunosti rešen. Naime, kada je $C = 1$, a ulazni signal D se menja sa nule na jedinicu, u kratkom vremenskom intervalu, jednakom kašnjenju kroz inverter, pojavljuje se kombinacija $S = R = 0$. Ako se u tom intervalu promeni vrednost signala C sa jedinice na nulu, zamrznuta vrednost izlaza biće nedefinisana. Radi obezbeđenja pouzdanog rada D leč kola, u praksi se zahteva da signal na ulazu D bude stabilan za vreme t_{su} (engl. setup time) pre opadanja signala dozvole C sa jedinice na nulu.

11.6.3 D flipflop

SR leč kola mogu menjati stanje na izlazu u bilo kom vremenskom trenutku, dok je kod D leč kola promena stanja na izlazu moguća u bilo kom trenutku kada je signal dozvole aktivan. Kod kola sa povratnom spregom to može stvoriti velike probleme, pa se zbog toga koriste bistabilna kola kod kojih se promena stanja na izlazu (okidanje) može vršiti samo prilikom *promene* logičkog stanja ulaza na koji se dovodi takt. Takvi bistabilni elementi se nazivaju *flipflopovi*. U praksi se sreću dva načina okidanja flipflopa: *impulsni* (okidanje se vrši celim pozitivnim ili negativnim takt impulsom), i *ivični* (okidanje se vrši sinhrono sa rastućom ili opadajućom ivicom signala takta). U savremenim digitalnim kolima mnogo više se koristi ivični način okidanja, pa će u daljem tekstu biti opisano kolo D flipflopa sa ivičnim okidanjem prikazano na slici 11.24a. U grafičkom simbolu na slici 11.24b ivično okidanje je označeno trouglom kod takt ulaza C , a kružić kod takt ulaza označava okidanje na opadajuću ivicu takta.



Slika 11.24: Ivični D flipflop sa okidanjem na opadajuću ivicu: a) Šema kola, b) Grafički simbol

Kada je takt signal u kolu sa slike 11.24a na visokom nivou, stanje na izlazima NI kola iz prvog stepena određeno je stanjem na D ulazu. Međutim, drugi nivo logičkih kola blokiran je visokim nivoom takt signala, tako da su na ulazima S i R u SR leč kolo logičke jedinice, koje ga drže u zatečenom stanju. Kada takt signal prelazi sa logičke jedinice na logičku nulu blokiraju se ulazi NI kola, ali se stanje na izlazima NI kola ne menja sve dok ne prođe vreme propagacije signala kroz NI kola t_p . Kako se istovremeno sa blokiranjem NI kola aktiviraju ILI kola iz drugog stepena, na jednom od ulaza S ili R pojaviće se kratak negativan impuls trajanja t_p koji će postaviti SR leč u željeno stanje određeno D ulazom. Posle toga, zbog niskog nivoa takt signala, NI kola ostaju blokirana i stanje flipflopa se ne može promeniti. Funkcionalna i eksitaciona tabela ivičnog D flipflopa sa okidanjem na opadajuću ivicu date su na slici 11.25.

D	C	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}
0	\downarrow	0	1
1	\downarrow	1	0
\times	0	Q_n	\bar{Q}_n
\times	1	Q_n	\bar{Q}_n

Q_n	Q_{n+1}	D	C
0	0	0	\downarrow
0	1	1	\downarrow
1	0	0	\downarrow
1	1	1	\downarrow

Slika 11.25: a) Funkcionalna i b) eksitaciona tabela ivičnog D flipflopa sa okidanjem na opadajuću ivicu.

11.7 Multivibratorska kola

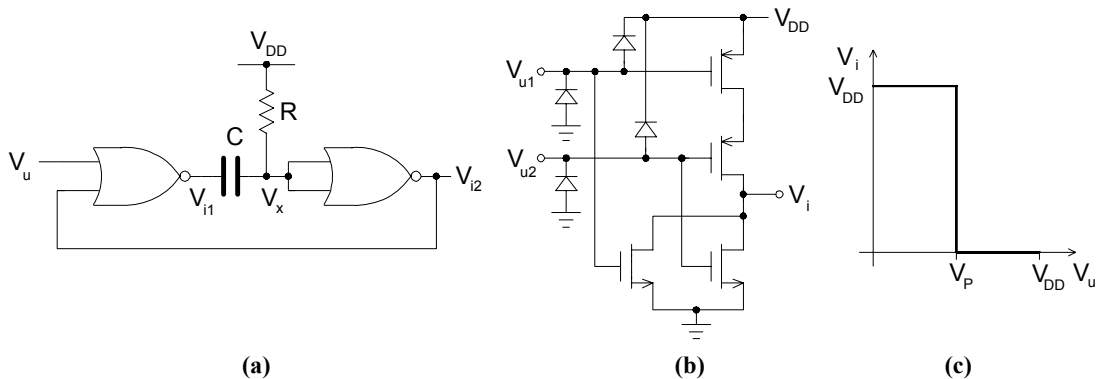
Multivibratorska kola imaju jedno ili dva stanja u kojima se mogu zadržati samo tačno određeno vreme. Takva stanja se nazivaju *kvazistabilna stanja*.

Monostabilni multivibratori imaju jedno stabilno stanje u kome ostaju sve dok pod dejstvom spoljašnje pobude ne pređu u kvazistabilno stanje. Pošto protekne izvesno vreme, određeno parametrima kola, monostabilno kolo se vraća u stabilno stanje. Tipična primena monostabilnih multivibratora je generisanje impulsa tačno definisanog trajanja.

Astabilni multivibratori (relaksacioni oscilatori) nemaju nijedno stabilno stanje, već se dva kvazistabilna stanja naizmenično smenjuju. Tipična primena astabilnih multivibratora je generisanje periodične povorke impulsa čiji su parametri određeni izborom elemenata kola. Takva periodična povorka impulsa se u sinhronim digitalnim sistemima koristi kao takt signal.

11.7.1 Monostabilni multivibrator

Monostabilni multivibrator sa CMOS logičkim kolima, čija je šema prikazana na slici 11.26a, koristi NILI kola kao aktivne elemente. Radi kompletnosti i jednostavnije analize rada kola, na slici 11.26b je prikazana uprošćena struktura logičkog CMOS NILI kola sa zaštitnim diodama na ulazu. Zaštitne diode, koje u normalnom radu logičkih kola nikada ne provode, u slučajevima kada se logička kola primenjuju u impulsnim generatorima imaju važnu ulogu u određivanju trajanja generisanih impulsa.



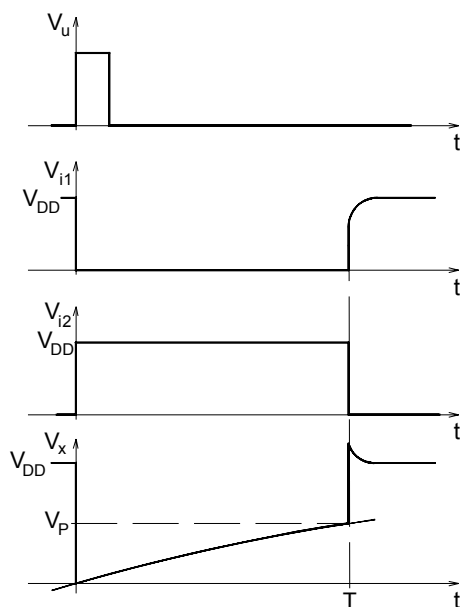
Slika 11.26: a) Monostabilni multivibrator sa CMOS NILI kolima, b) uprošćena struktura CMOS NILI kola, c) idealizovana karakteristika prenosa.

Da bi se pojednostavilo objašnjenje rada kola, u daljoj analizi će se smatrati da je karakteristika prenosa CMOS NILI kola idealna kao na slici 11.26c. Napon prelaza na karakteristici prenosa označimo sa V_P . Kao što je već rečeno, napon prelaza je obično jednak polovini napona napajanja V_{DD} .

U stabilnom stanju, pre dovođenja okidnog impulsa, napon na ulazu drugog NILI kola v_x jednak je naponu napajanja V_{DD} jer kroz otpornik R ne teče struja. Stoga su naponi $v_{i2}(0^-) = 0$ V, i $v_{i1}(0^-) = V_{DD}$. Napon na kondenzatoru u stabilnom stanju je $v_C(0^-) = 0$ V.

Okidni impuls se dovodi u trenutku $t = 0$ na slobodni ulaz prvog NILI kola. Ovaj skok napona na ulazu izaziva nagli pad napona na izlazu prvog NILI kola pa je $v_{i1}(0^+) = 0$ V. U ovoj analizi je zanemareno kašnjenje kroz logička kola, s obzirom da je znatno kraće od vremenskih intervala koji će u analizi biti od interesa. Kako se napon na kondenzatoru ne može trenutno

promeniti, napon na ulazu drugog logičkog kola v_x pada za isti iznos pa je $v_x(0^+) = 0 \text{ V}$. Napon na izlazu drugog logičkog kola skače na vrednost napona napajanja, tj. $v_{i2}(0^+) = V_{DD}$. Vremenski dijagrami ulaznog napona v_u , izlaznih napona logičkih kola v_{i1} i v_{i2} , i napona v_x prikazani su na slici 11.27.



Slika 11.27: Vremenski dijagrami napona u kolu sa slike 11.26.

S obzirom da je sada $v_x \neq V_{DD}$, kroz otpornik R protiče struja koja puni kondenzator C i ide u izlaz prvog NILI kola. Nastalo stanje traje samo dok se napon v_x ponaša kao napon logičke nule na ulazu, tj. dok je $v_x < V_P$. To je, dakle, kvazistabilno stanje. Kondenzator se puni strujom čija je vremenska zavisnost eksponencijalnog tipa, jer je u pitanju RC kolo prvog reda. Napon v_x takođe ima eksponencijalnu zavisnost i definisan je jednačinom:

$$v_x(t) = v_x(\infty) + [v_x(0^+) - v_x(\infty)]e^{-t/\tau} \quad (11.67)$$

gde je $v_x(0^+) = 0 \text{ V}$, $v_x(\infty) = V_{DD}$, dok je vremenska konstanta τ data izrazom:

$$\tau = (R + R_{izl})C \quad (11.68)$$

gde je R_{izl} mala izlazna otpornost NILI kola. Smenom vrednosti za $v_x(0^+)$ i $v_x(\infty)$ u eksponencijalnu jednačinu za $v_x(t)$, dobija se vremenska zavisnost napona v_x u toku trajanja kvazistabilnog stanja:

$$v_x(t) = V_{DD}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (11.69)$$

Kvazistabilno stanje se završava u trenutku $t = T$, kada napon v_x dostiže napon prelaza V_P . Tada napon v_{i2} ponovo pada na 0 V , a zbog toga napon v_{i1} skače na V_{DD} . Pošto se napon na

kondenzatoru ne može trenutno promeniti, skok napona v_x bi trebalo da bude isti, tj. trebalo bi da bude $v_x(T^+) = V_p + V_{DD}$. Zbog ugrađenih zaštitnih dioda na ulazu koje ograničavaju vrednost ulaznog napona na opseg između 0 i V_{DD} (ako se zanemari pad napona na provodnoj diodi), napon v_x neće moći da premaši napon napajanja, već će doći do naglog pražnjenja kondenzatora kroz zaštitnu diodu i izvor za napajanje. Napon na kondenzatoru se naglo smanji za V_p jer se kondenzator po završetku kvazistabilnog stanja prazni sa malom vremenskom konstantom $(R_d + R_{ztl})C$, gde je R_d mala otpornost provodne zaštitne diode.

Zamenom $v_x(T) = V_p$ i rešavajući dobijenu jednačinu po T , za trajanje kvazistabilnog stanja se dobija:

$$T = \tau \ln \left[\frac{V_{DD}}{V_{DD} - V_p} \right] \quad (11.70)$$

Kako je obično $V_p = V_{DD}/2$, konačno se dobija:

$$T = \tau \ln 2 = 0.69(R + R_{ztl})C \cong 0.69RC \quad (11.71)$$

Dakle, napon na izlazu v_{i2} predstavlja impuls, čije je trajanje određeno vrednostima otpornika, kondenzatora i napona prelaza karakteristike prenosa logičkog kola. Tačnost trajanja generisanog impulsa malo zavisi od tačnosti otpornika i kondenzatora, jer njihove proizvodne tolerancije mogu biti male, a temperaturni koeficijenti se mogu tako izabrati da vremenska konstanta τ bude nezavisna od temperature. Nasuprot tome, proizvodne tolerancije napona prelaza V_p su velike, a temperaturna stabilnost napona V_p je dobra. Prema tome, najuticajniji parametar koji utiče na tačnost trajanja generisanog impulsa u masovnoj proizvodnji je napon prelaza V_p .

Za ispravno funkcionisanje monostabilnog multivibratora sa slike 11.26, neophodno je da okidni impuls zadovolji neke uslove. Amplituda okidnog impulsa mora da bude veća od napona V_p , da bi se inicirao lanac promena u kolu. Takođe, trajanje ulaznog impulsa mora biti u određenim granicama. Maksimalna vrednost trajanja okidnog impulsa mora biti manja od trajanja kvazistabilnog stanja. Minimalna vrednost trajanja okidnog impulsa mora biti veća od vremena kašnjenja dva logička kola, što se lako može utvrditi analizom vremenskih dijagrama uz uračunavanje vremena kašnjenja logičkih kola.

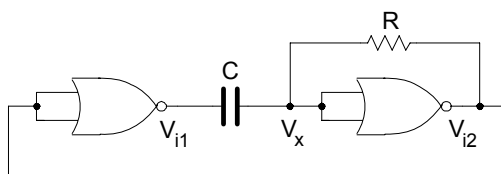
11.7.2 Astabilni multivibrator

Monostabilni multivibrator sa CMOS NILI kolima sa slike 11.26 može se lako pretvoriti u astabilni multivibrator vezivanjem otpornika R na izlaz drugog NILI kola umesto na izvor za napajanje. Astabilni multivibrator sa CMOS NILI kolima (NI kolima, ili invertorima) prikazan je na slici 11.28. U cilju uprošćenja analize rada astabilnog kola mogu se uvesti neke pretpostavke. Pretpostavićemo da invertori imaju idealnu karakteristiku prenosa kao na slici 11.26c, da je izlazna impedansa invertora zanemarljivo mala, i da su zaštitne diode na ulazu idealne. Takođe pretpostavićemo da je vreme kašnjenja kroz logička kola zanemarljivo.

Nivoi napona na izlazima logičkih kola mogu biti samo nivoi logičke jedinice (V_{DD}) i logičke nule (0 V). Osim toga, signali na izlazima v_{i1} i v_{i2} su komplementarni. Pretpostavimo da

je neposredno pre početka posmatranja napon $v_x < V_p$, gde je V_p napon prelaza karakteristike prenosa. Onda je $v_{i2}(0^-) = V_{DD}$, $v_{i1}(0^-) = 0V$, pa se kondenzator C puni strujom kroz otpornik R . Neka napon na kondenzatoru dostigne napon prelaza V_p u trenutku $t = 0^-$, što izaziva regenerativni proces po čijem se završetku u trenutku $t = 0^+$ stanje na izlazima menja i postaje $v_{i2}(0^+) = 0V$, $v_{i1}(0^+) = V_{DD}$. Posle promene stanja, napon v_x trebalo bi da bude $v_x(0^+) = v_x(0^-) + \Delta v_{i1} = V_p + V_{DD}$, ali, zbog toga što zaštitna dioda počne da provodi, poraste samo do V_{DD} . Posle toga, napon v_x počne da opada jer se kondenzator C prazni kroz otpornik R . Kvazistabilno stanje se završava kada napon v_x opadne do nivoa V_p . Trajanje prvog kvazistabilnog stanja određeno je izrazom:

$$T_1 = RC \ln \frac{v_x(\infty) - v_x(0^+)}{v_x(\infty) - v_x(T_1^-)} = RC \ln \frac{V_{DD}}{V_p} \quad (11.72)$$



Slika 11.28: Astabilni multivibrator sa CMOS NILI kolima.

Na početku drugog kvazistabilnog stanja, zbog dejstva zaštitne diode, napon v_x naglo opadne do nule i raste ka naponu V_{DD} . Trajanje drugog kvazistabilnog stanja dato je izrazom:

$$T_2 = RC \ln \frac{v_x(\infty) - v_x(0^+)}{v_x(\infty) - v_x(T_2^-)} = RC \ln \frac{V_{DD}}{V_{DD} - V_p} \quad (11.73)$$

pri čemu je, zbog jednostavnosti, koordinatni početak vremenske ose pomeren u tačku $t = T_1$. Perioda oscilacija je onda:

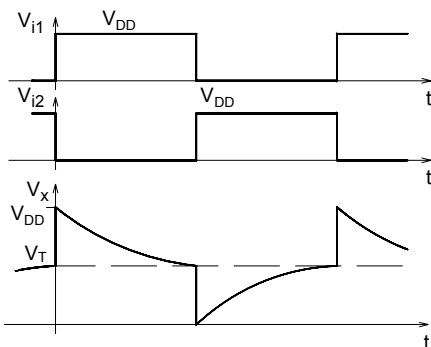
$$T = T_1 + T_2 = RC \ln \left[\frac{V_{DD}}{V_p} \frac{V_{DD}}{V_{DD} - V_p} \right] \quad (11.74)$$

U slučaju kada je $V_p = V_{DD}/2$, izraz za periodu se uprošćava i postaje:

$$T = RC \ln 4 \cong 1.4RC \quad (11.75)$$

Vremenski dijagrami napona v_{i1} , v_{i2} i v_x su prikazani na slici 11.29.

Slično kao kod monostabilnog kola, koje je opisano u prethodnom odeljku, perioda oscilacija astabilnog kola malo zavisi od temperature ali je jako zavisna od proizvodnih varijacija napona prelaza karakteristike prenosa V_p . Osim toga, opisano kolo nije pogodno za generisanje takta čija je učestanost iznad 1 MHz. U tom slučaju vrednost kondenzatora C postaje suviše mala pa uslov oscilovanja nije zadovoljen. Naime, jasno je da ako se uzme $C = 0$, tj. kondenzator ukloni iz kola, oscilacije moraju prestati. Ako se vrednost C povećava, oscilacije će započeti tek kad kondenzator bude veći od kritične vrednosti.



Slika 11.29: Vremenski dijagrami napona kod astabilnog kola.

Koristeći isti princip, mogu se konstruisati astabilna kola koja su pogodnija za rad na višim učestanostima, a koja imaju manju osetljivost na promene parametara.

11.8 Digitalno-analogna i analogno-digitalna konverzija

Pošto su fizičke veličine u prirodi analogne prirode, a u digitalnim sistemima se radi sa binarnim signalima, potrebno je omogućiti pretvaranje analognih veličina u digitalne i obrnuto. Tipičan primer potrebe za ovakvom konverzijom predstavlja sistem za snimanje i reprodukciju zvuka. Prilikom snimanje se zvučni signal u mikrofONU pretvara u analogni električni napon, koji se zatim u analogno-digitalnom konvertoru pretvara u digitalni oblik i zapisuje na disk ili CD. Prilikom reprodukcije se dešava inverzni proces. Digitalni signal se čita sa diska ili CD-a i u digitalno-analognom konvertoru pretvara u analogni napon, koji se pojačava i pobuđuje sistem zvučnika, gde se konačno pretvara u zvučni signal koji slušamo.

U binarnom brojnOM sistemu, pozitivan broj N se predstavlja sa n binarnih cifara (bitova) $b_i \in [0,1]$ na sledeći način:

$$N = b_{n-1}2^{n-1} + b_{n-2}2^{n-2} + \dots + b_12^1 + b_02^0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_i2^i \quad (11.76)$$

Bit b_{n-1} se naziva *bit najveće težine* (engl. most significant bit – MSB), dok se bit b_0 naziva *bit najmanje težine* (engl. least significant bit – LSB).

11.8.1 Digitalno-analogna konverzija

Prilikom digitalno-analogne konverzije, potrebno je digitalnom broju N dodeliti analogni napon v_i , tako da bude $v_i = kN$, gde je k konstanta proporcionalnosti. Jedno jednostavno kolo za digitalno-analognu konverziju, koje se naziva *D/A konvertor sa težinskom otpornom mrežom*, je prikazano na slici 11.30. Radi jednostavnije analize pretpostavićemo da je upotrebljeni operacioni pojačavač idealan, tako da se njegov invertorski priključak nalazi na virtualnoj masi. Onda je struja kroz granu sa otpornikom $R_j = R/2^j$, kada je odgovarajući prekidač zatvoren, jednaka:

$$I_j = \frac{V_{REF}}{R_j} = \frac{V_{REF}}{R} 2^j \quad (11.77)$$

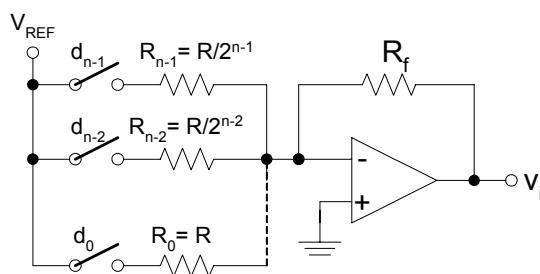
gde je V_{REF} stabilan referentni napon. Zbir struja kroz sve otpornike:

$$I = \sum_{j=0}^{n-1} d_j I_j = \sum_{j=0}^{n-1} d_j \frac{V_{REF}}{R_j} = \frac{V_{REF}}{R} \sum_{j=0}^{n-1} d_j 2^j \quad (11.78)$$

teče dalje kroz otpornik R_f stvarajući izlazni napon:

$$v_i = -R_f I = -\frac{R_f V_{REF}}{R} \sum_{j=0}^{n-1} d_j 2^j = kN \quad (11.79)$$

U prethodnim jednačinama, kada je bit $d_j = 1$, prekidač je zatvoren, dok kada je $d_j = 0$, prekidač je otvoren.



Slika 11.30: D/A konvertor sa težinskom otpornom mrežom.

Greška konverzije zavisi od tačnosti otpornika, tačnosti i stabilnosti referentnog napona i neidealnosti karakteristika realnog operacionog pojačavača.

11.8.2 Analogno-digitalna konverzija

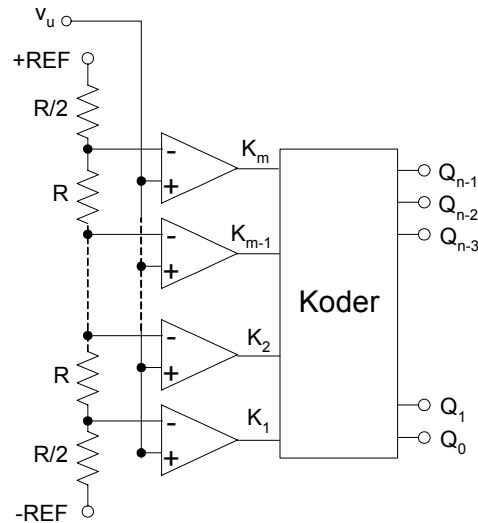
Pri analogno-digitalnoj konverziji potrebno je analognom naponu v_u dodeliti brojnu vrednost N , tako da bude $N \approx kv_u$, gde je k konstanta proporcionalnosti. U ovoj relaciji figuriše znak \approx , jer je tačnu jednakost vrlo retko moguće ostvariti. Naime, analogne veličine se prikazuju realnim brojevima, a digitalne racionalnim ili celim brojevima, tako da je greška prilikom konverzije neminovna. Ova greška se naziva *greška kvantizacije*.

Jedno jednostavno kolo za A/D konverziju, koje se naziva A/D konvertor sa paralelnim komparatorima, je prikazano na slici 11.31. Ulazni napon koji treba konvertovati se dovodi na neinvertorske krajeve svih komparatora. Ako se priključak otporničkog niza označen sa $-REF$ veže na masu, a priključak označen sa $+REF$ veže na stabilni naponski referentni izvor V_{REF} , onda se na spojnim tačkama otpornika dobijaju naponi koji se dovode na invertorske krajeve komparatora:

$$V_i = \frac{V_{REF}}{m} \left(i - \frac{1}{2} \right) \quad (11.80)$$

Analogni komparator poredi napone na svom neinvertorskom i invertorskom ulazu, i ako je $v_+ > v_-$ daje na izlazu logičku jedinicu, a ako je $v_- > v_+$ daje na izlazu logičku nulu. Dakle,

ako je $v_u > V_i$ onda je $K_i = 1$. Na primer, ako je $v_u > V_p$, $v_u < V_{p+1}$, onda je $K_i = 1, 1 \leq i \leq p$, i $K_i = 0, p+1 \leq i \leq m$. Dakle, na ulazu kodera će se naći niz jedinica i niz nula, koje koder treba da pretvori u željeni binarni kod kojim se predstavlja vrednost konvertovanog napona. Za realizaciju konvertora sa n izlaznih bita potrebno je $m = 2^n - 1$ komparatora i $m+1$ otpornika.



Slika 11.31: A/D konvertor sa paralelnim komparatorima.

Najvažnija odlika opisanog A/D konvertora je velika brzina rada, ali mu je mana velika složenost, zbog čega se koristi u slučajevima kada se analogni napon predstavlja sa najviše 10 bita. U ostalim slučajevima, kada je potrebna veća preciznost konverzije, koriste se drugi tipovi A/D konvertora koji omogućavaju konverziju sa 12-20 bita, ali po cenu dužeg vremena konverzije.

11.9 Osnovna memorijska kola

Bistabilna kola opisana u odeljku 11.6 mogu da se iskoriste za pamćenje informacije od 1 bita. Pošto se u digitalnim sistemima najčešće pamte višebitne informacije, opisana bistabilna kola se mogu grupisati i imati neke zajedničke kontrolne ulaze. Ako je potrebno pamtiti manju količinu informacija, bistabilna kola se organizuju u *registre*, a za pamćenje većih količina informacija bistabilna kola se organizuju u *memorije*.

Da bi se ostvarila memorija što većeg kapaciteta, na silicijumskoj pločici je potrebno realizovati što veći broj memorijskih ćelija, za šta je potrebno ispuniti određene uslove. Prvo, dimenzije memorijskih ćelija treba da budu što manje. Drugo, potrošnja ćelija treba da bude što manja, da bi se generisana toplotna energija što lakše odvela sa čipa. Zbog toga se memorijske ćelije u praksi ne realizuju sa već opisanim bistabilnim kolima već se koriste jednostavnije strukture.

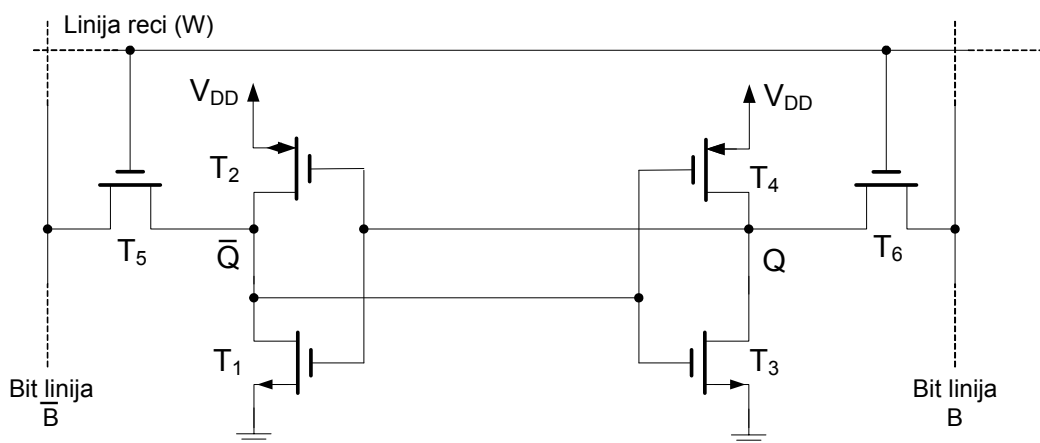
Postoje razne vrste i razne podele poluprovodničkih memorija. Po jednoj kategorizaciji one se dele na memorije kod kojih su procesi upisa i čitanja informacija ravnopravni (read/write memory) i memorije kod kojih je čitanje informacija brzo a upis jednokratni ili dugotrajan (read only memory – ROM). Prva vrsta memorija se tradicionalno naziva RAM (random access memory – memorija sa slučajnim pristupom). Ovaj naziv potiče sa početka razvoja računarske tehnike kada se termin memorija sa slučajnim pristupom koristio za memorije sa magnetnim

jezgrima i poluprovodničke memorije, koje su omogućavale pristup do bilo koje ćelije za isto vreme, za razliku od *sekvencijalnih memorija* (disk, traka, CD, DVD) kod kojih je pristup informacijama najbrži ako se one čitaju u redosledu kako su upisane. Sa današnje tačke gledišta podela memorija na RAM i ROM nije opravdana, jer obe omogućavaju slučajni pristup ćelijama, ali je ostala u upotrebi jer se teško može izbaciti iz prakse.

Po drugoj kategorizaciji, memorije se dele po sposobnosti čuvanja informacija na *statičke memorije* (SRAM) i *dinamičke memorije*. Statičke memorije zadržavaju upisane informacije sve dok imaju napajanje ili dok se ne izvrši ponovni upis. Dinamičke memorije zadržavaju upisane informacije veoma kratko vreme, reda desetak ms, pa se njihov sadržaj mora periodično obnavljati.

11.9.1 Statičke memorije

Osnovna jedinica statičke memorije vrlo je slična RS leč kolu, ali se zbog smanjenja broja potrebnih komponenata u realizaciji memorijskih ćelija ne koriste NILI ili NI kola već CMOS invertori. Šema statičke memorijske ćelije je prikazana na slici 11.32.



Slika 11.32: CMOS SRAM memorijska ćelija.

Osnovu memorijske ćelije čini leč kolo, koje čine dva CMOS invertora T_1, T_2 i T_3, T_4 . Tranzistori T_5 i T_6 su tranzistori za spregu memorijske ćelije sa linijama za pristup. Ovi tranzistori su provodni kada linija reči (W) dođe na potencijal logičke jedinice (V_{DD}) i onda spajaju memorijsku ćeliju sa komplementarnim bit linijama (B i \bar{B}).

Čitanje sadržaja ćelije se izvodi na sledeći način. Neka je u ćeliju upisan sadržaj $Q = 1$, $\bar{Q} = 0$. Pre operacije čitanja, linije B i \bar{B} se dovedu na neki potencijal izvedu logičke jedinice i logičke nule, najčešće na $V_{DD}/2$. Kada se selektuje linija reči i uključe T_5 i T_6 , protekne struja kroz T_4 i T_6 do linije B , puneći parazitnu kapacitivnost linije C_B . Istovremeno, teče struja od linije \bar{B} kroz T_5 i T_1 do mase, koja prazni parazitnu kapacitivnost linije $C_{\bar{B}}$. Dakle, postoji diferencijalni napon $v_{B\bar{B}} > 0$, koji osetljivi senzorski pojačavač može registrovati i na svom izlazu dati pravu vrednost napona logičke jedinice. Ako je u ćeliju upisana logička nula, onda će diferencijalni napon biti $v_{B\bar{B}} < 0$, i senzorski pojačavač će na izlazu dati logičku jedinicu. Primetimo da se očitavanjem sadržaja ne menja stanje memorijske ćelije, odnosno, *čitanje je nedestruktivno*.

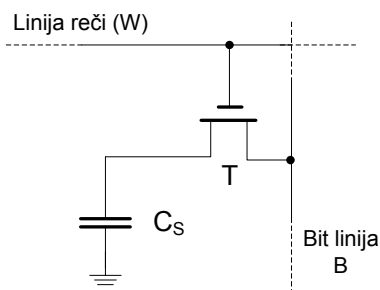
Prilikom procesa upisa, bit linije B i \bar{B} se dovedu na potencijale koji odgovaraju sadržaju koji treba da se upiše u ćeliju. Pretpostavimo da je u ćeliju već upisana jedinica i da treba upisati nulu. Onda se linija B dovodi na logičku nulu, $v_B = 0$, a linija \bar{B} na logičku jedinicu, $v_{\bar{B}} = V_{DD}$. Kada sprežni tranzistori provedu, parazitna kapacitivnost čvora \bar{Q} , $C_{\bar{Q}}$, se puni, a parazitna kapacitivnost čvora Q , C_Q se prazni, što izaziva promenu stanja na izlazima invertora, odnosno promenu sadržaja upisanog u ćeliju.

Primetimo da je zbog toga što su parazitne kapacitivnosti bit linija B i \bar{B} , C_B i $C_{\bar{B}}$, znatno veće od parazitnih kapacitivnosti čvorova Q i \bar{Q} , C_Q i $C_{\bar{Q}}$, proces čitanja informacija znatno duži od procesa upisa informacija u statičku memorijsku ćeliju.

Tipično vreme pristupa kod savremenih statičkih memorija je manje od 10 ns. Statičke memorije se koriste u primenama gde je potrebna velika brzina rada, kao što su na primer, keš memorije ili memorije u sistemima za digitalnu obradu signala. Kapacitet statičkih memorija ide do nekoliko Mbita.

11.9.2 Dinamičke memorije

Mada su se u prošlosti koristile različite ćelije, sve savremene dinamičke memorije koriste istu ćeliju sa jednim MOS tranzistorom, koja je prikazana na slici 11.33.



Slika 11.33: Dinamička memorijska ćelija.

Dinamička memorijska ćelija pamti informacije u malom kondenzatoru C_S , koji se pravi istim postupkom kao gejt MOS tranzistora. Kapacitet C_S je veoma mali i iznosi svega 30-50 fF ($1 \text{ fF} = 10^{-15} \text{ F}$). Ako je u ćeliju upisana logička jedinica, napon na kondenzatoru je visok, $V_{CS} = V_{DD} - V_t$, a kada je upisana logička nula, napon na kondenzatoru je približno nula, $V_{CS} \approx 0$. Pošto je dielektrik (oksid silicijuma) kondenzatora veoma tanak, zbog efekata struje curenja kada je sprežni tranzistor isključen, mala količina elektriciteta akumulirana u kondenzatoru se isprazni za desetak milisekundi. Zbog toga je potrebno vršiti obnavljanje ili *osvežavanje sadržaja* dinamičke memorijske ćelije svakih 5 do 10 ms, odakle potiče naziv ovih memorija.

Proces čitanja upisanih informacija se obavlja na sledeći način. Prvo se podigne potencijal na liniji reči W , čime se uključuje sprežni tranzistor. Time se kondenzator C_S poveže paralelno kapacitivnosti bit linije C_B , koja je 30-50 puta veća od C_S . Kao i kod statičkih memorija, pre operacije čitanja bit linija se dovodi na potencijal $V_{DD} / 2$. Povezivanjem C_B i C_S u paralelu dolazi do preraspodele naelektrisanja između kondenzatora prema jednačini o održanju naelektrisanja:

$$C_S V_{CS} + C_B \frac{V_{DD}}{2} = (C_S + C_B) \left(\frac{V_{DD}}{2} + \Delta V \right) \quad (11.81)$$

odakle se dobija promena napona na bit liniji posle očitavanja sadržaja ćelije:

$$\Delta V = \frac{C_S}{C_S + C_B} \left(V_{CS} - \frac{V_{DD}}{2} \right) \approx \frac{C_S}{C_B} \left(V_{CS} - \frac{V_{DD}}{2} \right) \quad (11.82)$$

jer je $C_S \ll C_B$. Ako je u ćeliju bila upisana logička jedinica onda je promena napona:

$$\Delta V(1) \approx \frac{C_S}{C_B} \left(\frac{V_{DD}}{2} - V_t \right) \quad (11.83)$$

dok, ako je u ćeliju bila upisana logička nula:

$$\Delta V(0) \approx -\frac{C_S}{C_B} \frac{V_{DD}}{2} \quad (11.84)$$

Kao što se vidi, promena napona na bit liniji B je veoma mala, jer je $C_S \ll C_B$. Na primer, ako je $V_{DD} = 5 \text{ V}$, $V_t = 1.5 \text{ V}$, $C_B = 30C_S$, onda je $\Delta V(1) = 33 \text{ mV}$ a $\Delta V(0) = -83 \text{ mV}$. Promena napona je još manja kod novijih dinamičkih memorija, kod kojih se zbog smanjenja potrošnje koristi napon napajanja $V_{DD} = 3.3 \text{ V}$ ili još manji. Dakle, za otkrivanje promena napona na bit liniji i ispravnu detekciju upisanog sadržaja u ćeliju, potreban je vrlo osetljiv senzorski pojačavač.

Primetimo takođe da je *proces čitanja sadržaja dinamičke memorijske ćelije destruktivan*, pa se posle čitanja mora ponovo upisati isti sadržaj u memorijsku ćeliju. Detektovani sadržaj ćelije se na izlazu senzorskog pojačavača dovodi na ispravan logički nivo, V_{DD} ili 0 V , pa se vraća na bit liniju i ponovo upisuje u ćeliju. Istovremeno sa čitanjem jedne ćelije sprovodi se postupak osvežavanja sadržaja ostalih ćelija koje su vezane na istu liniju reči.

Proces upisa je sličan procesu čitanja. Prvo se bit linija dovede na potencijal koji odgovara sadržaju koji treba da se upiše, V_{DD} ili 0 V , pa se potom uključi sprežni tranzistor, čime se kondenzator C_S optereti odgovarajućom količinom naelektrisanja. Istovremeno sa upisom u jednu ćeliju sprovodi se postupak osvežavanja sadržaja ostalih ćelija koje su vezane na istu liniju reči.

Kao što se vidi, prilikom upisa u neku ćeliju, ili prilikom očitavanja neke ćelije, vrši se i osvežavanje sadržaja svih ćelija u selektovanoj vrsti. Međutim, da bi se sačuvalo i sadržaj ćelija koje se nalaze u vrstama kojima se ne pristupa radi čitanja ili upisa, mora se vršiti periodično osvežavanje cele memorije svakih 5-10 ms. Operacija osvežavanja se uvek izvodi za celu vrstu, tako što se pročitaju sadržaji svih ćelija u vrsti i ponovo upišu na već opisani način. Tokom osvežavanja ne može se vršiti ni čitanje ni upis u memoriju. Međutim, pošto se istovremeno osvežava sadržaj velikog broja ćelija, na osvežavanje se potroši manje od 2 % raspoloživog vremena, tako da je dinamička memorija raspoloživa za normalan rad preko 98 % vremena.

Tipično vreme pristupa kod savremenih dinamičkih memorija je 50-60 ns, a kapacitet dinamičkih memorija ide do nekoliko desetina Mbita. Dinamičke memorije se najviše koriste za realizaciju operativne memorije računarskih sistema, jer imaju nižu cenu i veći kapacitet od statičkih memorija.